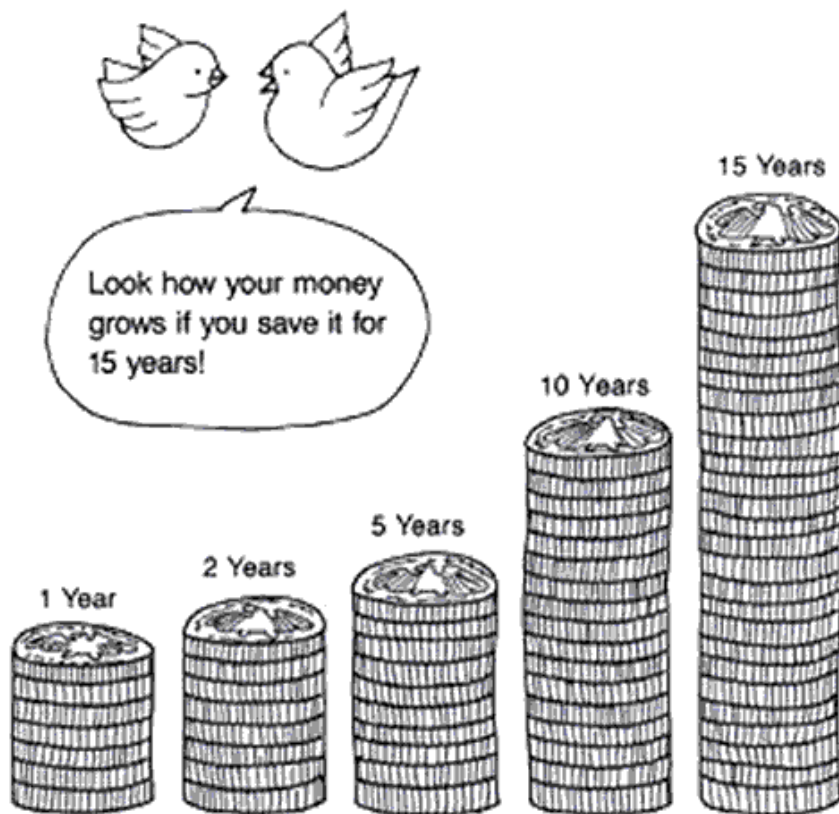


Financiële algebra

Wilfried Van Hirtum

Versie 1.03

16 augustus 2018



**The money that you put into a savings account
earns interest and grows.**

Copyright © 2018 Wilfried Van Hirtum

Dit werk wordt vrij gegeven aan de gemeenschap en mag dus gekopieerd, verspreid en aangepast worden mits vermelding van de bron onder voorbehoud dat het resultaat blijft beantwoorden aan deze voorwaarden, dus vrij blijft voor de gemeenschap.

Bronvermelding

De figuur op de titelpagina is met dank ontleend aan:

<http://www.heartlandbank.com/discovery/activity.html>

Voorwoord

*I've learned it's always better
to have a small percentage of a big success,
than a hundred percent of nothing.*

— Art Linkletter

Geld sparen brengt op. Vooral als je de rente zelf ook spaart. Intrest brengt zelf ook intrest op. Deze intrest heet samengestelde intrest. Zo groeit het kapitaal met de jaren. Je leert in deze cursus hoe je dat eindkapitaal kunt berekenen.

Je leert ook afgeleide berekeningen maken. Bijvoorbeeld: tegen welke rentevoet moet ik 500 euro sparen om na 7.5 jaar een eindkapitaal van 620 euro te bezitten. Of nog: hoe lang moet ik wachten tot een beginkapitaal van 12 000 euro aangroeit tot een eindkapitaal van 15 000 euro.

Bij alle berekeningen, zowel bij de allereenvoudigste tot de meer ingewikkelde berekeningen speelt het begrip rentefactor een centrale rol.

Een factor is een getal waarmee je vermenigvuldigt. Soms moet je herhaaldelijk vermenigvuldigen. Deze bewerking heet machtsverheffing. Bij bewerkingen die afgeleid zijn van de machtsverheffing spelen twee bewerkingen een belangrijke rol: wortelberekening en logaritmeberekening. Deze laatste bewerking is waarschijnlijk nieuw voor jou. Gelukkig zijn er rekenmachines om al deze berekeningen gemakkelijk uit te voeren.

Tussen de tekst en achter elk hoofdstukje staan heel wat opdrachten die je zelfstandig moet kunnen uitvoeren als je de tekst aandachtig leest. Om jezelf te controleren staan de oplossingen van de opdrachten achteraan verzameld.

Veel wiskundeplezier met deze cursus.

Wilfried Van Hirtum

,

Inhoudsopgave

1	Procenten bij of af	5
2	Enkelvoudige intrest	9
2.1	Voorbeeld	9
2.2	Voorbeeld	11
2.3	Voorbeeld	11
2.4	Opdrachten	11
3	Machten	13
3.1	Voorbeeld: een bedrag sparen en wachten	13
3.2	Snel met de rekenmachine	13
3.3	Opdrachten	15
4	Samengestelde intrest	17
4.1	Voorbeeld	17
4.2	Algemeen	17
4.3	Opdrachten	18
5	Gelijkwaardige rentevoeten	20
5.1	Voorbeeld	20
5.2	Tip	21
5.3	Opdrachten	21
	Oplossingen van de opdrachten	27

1 Procenten bij of af

Procent betekent per honderd. Bijvoorbeeld: 20 % betekent 20 per honderd. Je kunt procenten dus als een breuk schrijven. Bijvoorbeeld: je schrijft 20 % als $\frac{20}{100}$. Je kunt de breuk natuurlijk ook decimaal schrijven:

$$20\% = \frac{20}{100} = 0.20$$

Je zou 0.20 kunnen afkorten tot 0.2, maar dat doen we liever niet. Daar is een goede reden voor: je leest 0.20 gemakkelijker als 20 %.

We zullen vanaf nu dus procenten altijd schrijven als een decimaal getal. Je zult zien dat dit heel wat voordelen oplevert, vooral bij het rekenen met procenten.

Voorbeeld 1

Stel dat gevraagd wordt: Hoeveel is 19 % van 20 euro.

Oplossing: 19 % schrijf je dan als 0.19 en je berekent $0.19 \cdot 20$ en dat is dan 3.80 euro. Dat valt dus wel mee.

Voorbeeld 2

Bereken 25 % van 30 kg.

Oplossing: 25 % = 0.25 dus $0.25 \cdot 30 \text{ kg} = 7.5 \text{ kg}$.

1 Schrijf als een decimaal getal:

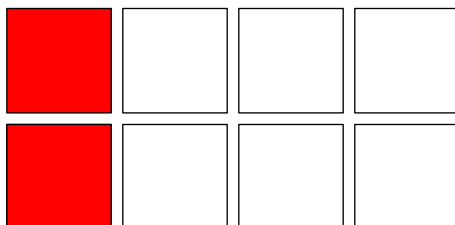
- (a) 4 %
- (b) 21 %
- (c) 6 %
- (d) 3.75 %
- (e) 100 %
- (f) 100 % + 6 %
- (g) 100 % - 6 %
- (h) 300 %
- (i) 1 %

2 Bereken nu zelf. In de etalage ligt een broek van 29.90 euro. Er zijn solden en je krijgt een kortingsbon van 10%, waarmee je mag betalen bij de volgende aankoop. Voor hoeveel euro staat er op die kortingsbon?

Voorbeeld 3

Hoe maak je nu van breuken procenten? Die vragen kom je vaak genoeg tegen. Zoiets van: hoeveel procent van de tekening is gekleurd.

Hoeveel procent van de onderstaande tekening is rood gekleurd?



Oplossing: 2 op 8 blokjes is rood. $\frac{2}{8} = 0.25$. Dus 25 % van de blokjes is roodgekleurd.

Voorbeeld 4

Een tube babycrème kostte vorige maand nog 6.95 euro. Het is echter met 5 % opgeslagen.

Hoeveel kost het product nu?

Nou makkelijk zul je denken.

Je neemt 5 % van 6.95 (dus $0.05 \cdot 6.95$ euro = 0.35 euro) en telt dat bij 6.95 euro op en je hebt de nieuwe prijs.

Dus de nieuwe prijs is 6.95 euro + 0.35 euro = 7.30 euro.

Maar dat kan makkelijker. Het oude bedrag telt voor 100 %. Daar komt nog 5 % bij en dat is dus samen 105 %. Dat betekent dat je de oude prijs gewoon met 1.05 kunt vermenigvuldigen om de nieuwe prijs uit te rekenen. Dus: 6.95 euro $\cdot 1.05 = 7.30$ euro.

Procent bijtellen

5 % bij een bedrag bijtellen is dus het bedrag vermenigvuldigen met 1.05.

- 3 Een pedicurestoel kost 450 euro zonder btw. Hoeveel kost deze stoel mét btw?
- 4 De verbouwing van een woonhuis tot een schoonheidssalon kost 3 000 euro. Het huis is meer dan 20 jaar oud (btw = 6 %). Hoeveel kost de verbouwing mét btw?
- 5 Je koopt een massagetafel voor 1 250 euro zonder btw. Wat is de verhouding van het bedrag inclusief btw tot het bedrag zonder btw?

Voorbeeld 5

Stel de prijs van een artikel is 25 euro. Het jaar daarop daalt de prijs met 12 %. Wat wordt nu de nieuwe prijs?

Oplossing: oude prijs telt voor 100 %. Een daling van 12 %. Blijft over: $100\% - 12\% = 88\% = 0.88$.

Dus nieuwe prijs: $0.88 \cdot 25 \text{ euro} = 22 \text{ euro}$.

- 6** Vorig jaar kocht je een nieuwe auto voor 9 600 euro. Nu zijn we een jaartje later en de waarde van de wagen is met 18 % gedaald. Hoeveel is de auto nu nog waard?
- 7** 23 is welk percentage van 53?
- 8** Wat is 30 % van 120 euro?
- 9** 43 euro is 3 % van welk bedrag?
- 10** We hebben 24 nagelknipscharen gekocht. Per schaar kregen we 4 euro korting. We betaalden 270 euro.
Wat is de prijs van één schaar zonder korting?
- 11** Een auto verbruikt 5.4 liter benzine per 100 km. De benzinetank heeft een inhoud van 63 liter.
- (a) Hoeveel benzine verbruikt de wagen als je 800 km rijdt?
 - (b) Hoever kan je met een volle tank rijden?
 - (c)
- 12** Je hebt 14 euro bespaard op een paar schoenen die 40 % afgeprijsd waren.
Wat was de prijs vóór de solden?
- 13** Van de 892 leerlingen op een school volgen er 19 % Duits.
Hoeveel leerlingen zijn dat?
238 leerlingen volgen Spaans. Welk percentage is dat?

2 Enkelvoudige intrest



In de financiële wereld is het gebruikelijk dat over delen van een jaar enkelvoudige intrest wordt berekend en over hele jaren, samengestelde intrest.

Als je onder nul gaat bij een zichtrekening betaal je debetrente in verhouding tot het aantal dagen dat je in het rood staat. Als je rekeningen of belastingen niet op tijd betaalt, betaal je nalatigheidsintresten in verhouding tot het aantal dagen dat je te lang gewacht hebt met betalen.

De verschillende stortingen op een spaarrekening brengen intrest op evenredig met de tijd dat deze bedragen op de rekening blijven staan. Op 31 december kun je dan deze intrest afhalen of laten staan zodat ze zelf ook intrest opbrengt. Intrest die zelf ook intrest opbrengt, noemt men *samengestelde intrest*.

Om het eenvoudig te zeggen:

— Enkelvoudige versus samengestelde intrest —

Enkelvoudige intrest: stort geld, haal intrest af.

Samengestelde intrest: stort geld, laat intrest staan.

2.1 Voorbeeld

Je hebt van je rijke suikertante met nieuwjaar 1 000 euro gekregen. Je besluit dit te sparen tegen een rentevoet van 3 % per jaar in een systeem met enkelvoudige intrest. Je ontvangt na één jaar een intrest van

$$I = 1000 \cdot 0.03 = 30 \text{ euro}$$

Deze 30 euro kun je afhalen en bijvoorbeeld uitgeven aan een extraatje.

Je laat het bedrag van 1000 euro staan op je spaarboekje en zo kun je elk jaar een intrest van 30 euro afhalen.

Je kunt deze intrest ook al afhalen na bijvoorbeeld 5 maanden. De intrest bedraagt dan minder dan 30 euro: slechts $\frac{5}{12}$ van 30 euro.

$$I = 1000 \cdot 0.03 \cdot \frac{5}{12} = 12.50 \text{ euro}$$

De algemene formule van enkelvoudige intrest is dus:

Formule voor intrest

$$I = k \cdot i \cdot t \quad (1)$$

Hierbij is:

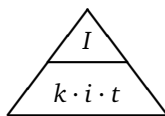
- I : de totale intrest over de hele periode
- k : het beginkapitaal
- i : de rentevoet per tijdseenheid, meestal per jaar
- t : de tijdsduur dat het kapitaal (of de schuld) uitstaat, uitgedrukt in de tijdseenheid die overeenkomt met de rentevoet i , meestal in delen van een jaar

De eindwaarde K is dan de som van het beginkapitaal k en de intrest I :

$$K = k + I \quad (2)$$

Je berekent de eindwaarde K dus in twee stappen: eerst I berekenen en daarna optellen bij k .

Je kunt formule(1) ook in een driehoekschema plaatsen, zodat je gemakkelijk de afgeleide formules kunt aflezen.



(3)

Let op

- Rond alle bedragen af op 0.01 euro.
- Rond rentevoeten af op 0.0001 %.
- Een *financieel jaar* telt voor 360 dagen (12 maanden van 30 dagen).
- Als je werkt met datums, moet je 365 dagen of 366 dagen nemen voor een jaar.
- Een gegeven rentevoet is gewoonlijk jaarlijks, tenzij uitdrukkelijk anders vermeld.

2.2 Voorbeeld

Je plaatst een bedrag van 725 euro op enkelvoudige intrest gedurende 60 dagen tegen 2.25%. Hoeveel bedraagt de eindwaarde van dit kapitaal?

Oplossing:

$$I = 725 \cdot 0.0225 \cdot \frac{60}{360} = 2.72$$

$$K = 725 + 2.72 = 727.72$$

Je kunt de eindwaarde *direct* berekenen als volgt:

$$I = k \cdot i \cdot t$$

$$K = k + I$$

$$K = k + k \cdot i \cdot t$$

$$K = k \cdot (1 + i \cdot t) \quad (4)$$

Uit formule(4) kun je dan k berekenen:

$$k = \frac{K}{1 + i \cdot t} \quad (5)$$

2.3 Voorbeeld

Welk bedrag moet je sparen tegen 1.75% opdat je na 3 maanden een eindwaarde bereikt van 1 100 euro?

Oplossing:

$$k = \frac{K}{1 + i \cdot t} = \frac{1100}{1 + 0.0175 \cdot \frac{3}{12}} = 1095.21 \text{ euro}$$

2.4 Opdrachten

- 14** Wat is de eindwaarde voor een kapitaal van 1.25 miljoen euro, op enkelvoudige intrest geplaatst gedurende 2 maanden tegen 1.75%?
- 15** Je wil een helm voor een bromfiets kopen van 95 euro. Je leent van je ouders het bedrag. Over 15 dagen kun je terugbetalen. Je ouders rekenen een intrestvoet van 5.5%. Hoeveel intrest moet je dan betalen?
- 16** Met een vakantiejob heb je 1500 euro verdiend. Je beslist om 300 euro uit te geven aan allerlei dingen die je al lang wilde kopen.
De rest zet je op een spaarrekening tegen 3% per jaar.
Negen maanden later besluit je een nieuwe fiets te kopen en haal je al het geld van de bank. Hoeveel heb je dan?
- 17** Door een erfenis ontvang je 2500 euro. Je belegt dit bedrag tegen een rentevoet van 3.25% per jaar. Hoeveel heb je 200 dagen later?
- 18** Je hebt met babysitten 156 euro verdiend. Je wilt met dit geld een horloge kopen van 168 euro. De bank biedt een spaarformule aan tegen een rentevoet van 2.3% per jaar.

- (a) Hoelang moet je nog wachten?
- (b) Je vindt dit uiteraard veel te lang en je gaat op zoek naar een bank die je een betere spaarformule kan aanbieden.
- Met welke rentevoet kun je die horloge al na 1 jaar kopen?

19 Bereken de interestvergoedingen bij de volgende gegevens (enkelvoudige intrest).

Bedrag	Intrestpercentage	Periode
1 250 euro	8 %	6 weken
9 800 euro	10 %	3 maand en 11 dagen
4 200 euro	3.5 %	van 12 april tot 15 augustus 2007

20 Twee kapitalen, waarvan het ene het dubbele is van het andere, staan uit tegen enkelvoudige intrest: het kleinste tegen 8 % en het grootste tegen 5 %.

Bepaal deze kapitalen indien na 1 jaar het kleinste kapitaal 1 euro minder intrest heeft opgebracht dan het grootste.

21 Twee kapitalen verschillen 200 euro en staan uit tegen 5 %. Na 1 jaar is de som van hun eindwaarden 1750 euro.

Bereken beide kapitalen.

22 Een kapitaal wordt op enkelvoudige intrest geplaatst van 13 september tot 5 december tegen 5.25 % en groeit aan tot 450 euro.

1. Hoeveel dagen staat het kapitaal uit?
2. Bereken de beginwaarde.

23 Je moet de energierekening betalen van 1 253 euro. Je moest ten laatste betalen op 6 maart 2012. Door omstandigheden heb je echter gewacht tot 16 juli 2012 om te betalen. De energieleverancier rekent je 7 % nalatigheidsintrest aan.

Tot hoeveel is de factuur nu opgelopen?

24 Het is 2 april 2007. Je rekening staat op 425 euro. Je doet een aankoop van 895 euro. Je komt dus onder nul. Pas op 16 mei 2007 stort je opnieuw een som van 600 euro om je tekort aan te zuiveren. De bank rekent een debetrente van 15.4 % aan.

1. Hoeveel dagen stond je in het rood?
2. Hoeveel debetrente heeft de bank aangerekend?

3 Machten

3.1 Voorbeeld: een bedrag sparen en wachten ...

Sanne heeft een bedrag van 110 euro op zak. Zij brengt dit bedrag naar een spaarbank. De rentevoet bedraagt 2.5 %.

Na 1 jaar is het kapitaal van Sanne aangegroeid met 2.5 %. Het kapitaal bedraagt nu:

$$110 \cdot 1.025 = 112.75 \text{ euro.}$$

Inderdaad, verhogen met 2.5 % betekent: vermenigvuldigen met 1.025.

Als Sanne dit kapitaal op het spaarboekje laat staan en nog eens een jaar wacht, is het nieuwe kapitaal nog eens aangegroeid met 2.5 %.

Het bedrag op het spaarboekje is na 2 jaar sparen dus:

$$112.75 \cdot 1.025 = 115.57 \text{ euro}$$

Schematisch:

$$110 \xrightarrow{\cdot 1.025} 112.75 \xrightarrow{\cdot 1.025} 115.57 \text{ euro}$$

We doen er nog eens twee jaar bij. Het beginkapitaal blijft dus in totaal vier jaar staan:

$$110 \xrightarrow{\cdot 1.025} 112.75 \xrightarrow{\cdot 1.025} 115.57 \xrightarrow{\cdot 1.025} 118.46 \xrightarrow{\cdot 1.025} 121.42 \text{ euro}$$

$$110 \cdot 1.025 \cdot 1.025 \cdot 1.025 \cdot 1.025 = 121.42 \text{ euro}$$

$$110 \cdot 1.025^4 = 121.42 \text{ euro}$$

25 Bereken de eindwaarde van een beginkapitaal van 110 euro dat 8 jaar vaststaat tegen een rentevoet van 2.5 %.

26 Bereken de eindwaarde van een beginkapitaal van 500 euro dat 28 jaar vaststaat tegen een rentevoet van 2.5 %.

Eindkapitaal

Eindkapitaal K na t jaar sparen tegen een rentevoet van 2.5 % per jaar:

$$K = k \cdot 1.025^t$$

3.2 Snel met de rekenmachine

De opeenvolgende tussenliggende eindwaarden:

110	110

Typ het beginkapitaal, en druk .

```

110
Ans*1.025 110
112.75

```

Typ ONMIDDELIJK voort: \cdot 1.025, en druk **Enter**.

```

110
Ans*1.025 110
112.75
115.56875
118.4579688
121.419418

```

Druk vervolgens nog eens **Enter**, en nog eens, en nog eens...

Je kunt de eindwaarde ook direct berekenen:

```

110*1.025^8
134.0243187

```

$110 \cdot 1.025^8$ **Enter**

Een tabel van de eindwaarde jaar na jaar:

```

Plot1 Plot2 Plot3
\Y1=110*1.025^X
\Y2=
\Y3=
\Y4=
\Y5=
\Y6=
\Y7=

```

Y= $110 \cdot 1.025^8$

```

TABLE SETUP
TblStart=0
ΔTbl=1
Indent: AUTO Ask
Depend: AUTO Ask

```

TblSet, stel de onafhankelijke variabele (tijd) in op auto.

X	Y1
0	110
1	112.75
2	115.57
3	118.46
4	121.42
5	124.45
6	127.57

X=0

Table

Je kunt de tijd ook manueel ingeven:

TABLE SETUP	
TblStart=0	
ΔTbl=1	
Indent: Auto	Ask
Depend: AUTO	Ask

TblSet, stel de onafhankelijke variabele (tijd) in op ask.

X	Y1
1	112.75
5	124.45
28	219.61
5.5	126

X=8+3/12

Table, je kunt ook delen van een jaar ingeven, bijvoorbeeld 8 jaar en 3 maanden wordt: $8 + \frac{3}{12}$

X	Y1
200	

Y1=15352.0283426

Zet de cursor op het getal. Een meer nauwkeurige waarde verschijnt dan onderaan in beeld.

27

Gegeven: een beginkapitaal $k = 110$ euro en een rentevoet van 2.5%.

1. Bereken het eindkapitaal na 8 jaar wachten.
2. Zelfde vraag na 15 jaar.
3. Zelfde vraag na 50 jaar.
4. Zelfde vraag na 5 jaar en 7 maanden.
5. Zelfde vraag na 90 jaar.

Eindkapitaal

Eindkapitaal K na t jaar sparen tegen een rentevoet van 2.5 % per jaar:

$$K = k \cdot 1.025^t$$

Hierin betekent K de waarde van het kapitaal na t jaar wachten. We noemen deze waarde het *eindkapitaal*. We noteren een hoofdletter K voor dit eindkapitaal omdat het eindkapitaal steeds groter is dan het beginkapitaal k .

3.3 Opdrachten

28

Gegeven: een beginkapitaal $k = 1\,225$ euro en een rentevoet van 3.75%.

Bereken de waarde van het eindkapitaal na:

1. 3 jaar
2. 6 jaar en 20 dagen
3. 17 jaar en 6 maanden

- 29** Een kapitaal $k = 630$ euro staat gedurende één jaar op een spaarrekening. Op het einde van dat jaar is het kapitaal gestegen tot een eindkapitaal $K = 662.76$ euro.
Hoeveel bedraagt de jaarlijkse rentevoet?
- 30** Je erft een som geld $k = 2\,560$ euro. Je spaart het bedrag tegen een rentevoet van 4.5%.
Hoe lang moet je wachten tot het kapitaal *verdubbeld* is?
Stel een tabel op om je zoekmethode samen te vatten.
- 31** Zie opdracht (30). Je kunt nu een som geld $k = 4\,000$ euro sparen tegen dezelfde rentevoet van 4.5%.
Hoe lang duurt het nú om dit bedrag te verdubbelen?

4 Samengestelde intrest

4.1 Voorbeeld

We sparen een beginkapitaal $k = 110$ euro gedurende vier jaar tegen 2.5% per jaar. Het schema voor de berekening van het eindkapitaal is als volgt:

$$110 \xrightarrow{\cdot 1.025} 112.75 \xrightarrow{\cdot 1.025} 115.57 \xrightarrow{\cdot 1.025} 118.46 \xrightarrow{\cdot 1.025} 121.42 \text{ euro}$$

Of korter:

$$110 \xrightarrow{\cdot 1.025^4} 121.42 \text{ euro}$$

4.2 Algemeen

— Symbolen —

k = beginkapitaal

u = rentefactor per tijdseenheid (bijvoorbeeld 1.025 per jaar)

t = aantal tijdseenheden (bijvoorbeeld 4 jaar)

K = eindkapitaal

$$k \xrightarrow{\cdot u} \dots \xrightarrow{\cdot u} \dots \xrightarrow{\cdot u} \dots \xrightarrow{\cdot u} K$$

Of korter:

$$k \xrightarrow{\cdot u^t} K$$

We hebben dus de formule:

$$K = k \cdot u^t \tag{6}$$

De tijdseenheid voor de rentefactor en voor de looptijd t moet DEZELFDE zijn:

Bijvoorbeeld: rentefactor PER JAAR en tijd in JAREN

Nog een voorbeeld: u per PER MAAND en t in MAANDEN

We weten ook nog:

— Verhogen met procent —

Een bedrag verhogen met 2.5% van dat bedrag,

is dit bedrag vermenigvuldigen met 1.025.

Rentefactor

i = rentevoet (bijvoorbeeld 2.5 %)

u = rentefactor (bijvoorbeeld 1.025)

Het verband tussen de rentevoet en de rentefactor:

$$u = 1 + i$$

(7)

4.3 Opdrachten

- 32 Wat is de eindwaarde van 100 000 euro die gedurende één jaar uitgezet wordt tegen een samengestelde intrest van 6 % per jaar?
- 33 Wat is de eindwaarde van 5 000 euro die gedurende 10 jaar uitgezet wordt tegen een samengestelde intrest van 2.5 % per semester (1 semester=0.5 jaar)?
- 34 Wat is de eindwaarde van 25 000 euro die gedurende 12 jaar uitgezet wordt tegen een samengestelde intrest van 1.25 % per trimester (1 trimester=3 maanden)?
- 35 Wat is de eindwaarde van 2 000 euro die gedurende anderhalf jaar uitgezet wordt tegen een samengestelde intrest van 0.45 % per maand?
- 36 Welk kapitaal moeten we uitzetten op samengestelde intrest gedurende 5 jaar, tegen 4.5%, om na afloop van die tijd over 500 000 euro te beschikken?
- 37 Door semestriële kapitalisatie is een kapitaal van 2 750 euro na 15 jaar aangegroeid tot 6 674.97 euro.
Wat is de gehanteerde rentevoet per semester?
- 38 Wat is de eindwaarde van 100 000 euro die gedurende 1 jaar tegen
1. 6 % intrest *per jaar* uitgezet wordt?
 2. 3 % intrest *per semester* uitgezet wordt?
 3. 1.5 % intrest *per trimester* uitgezet wordt?
 4. Hoeveel zou de eindwaarde zijn bij 0.5 % samengestelde intrest per maand? (meer of minder dan bij 6 % per jaar?)
 5. Geef een verklaring voor deze verschillen.

Bij samengestelde intrest geldt

6% per jaar

≠ 3% per semester

≠ 1.5% per trimester

≠ 0.5% per maand.

Deze rentevoeten zijn dus *niet gelijkwaardig*.

39 We beleggen gedurende 10 jaar 500 euro aan 4.25 % per jaar met jaarlijkse kapitalisatie.

Tegen welk procent moeten we datzelfde kapitaal gedurende dezelfde periode aan samengestelde intrest uitzetten om met *trimestriële* kapitalisatie dezelfde eindwaarde te bekomen als bij de jaarlijkse kapitalisatie aan 4.25 %?

40 Tien jaar geleden heeft de moeder van Tessy 725 euro op een voorhuwelijksspaarrekening uitgezet.

Nu is Tessy 25 jaar geworden en is het bedrag aangegroeid tot 1341.88 euro.

Hoeveel bedroeg de jaarlijkse rentevoet?

41 Wat is voordeliger voor de spaarder:

1. een bedrag van 597 euro sparen tegen 1 % per maand (gedurende twaalf maanden)
2. of 600 euro sparen tegen 12 % per jaar (gedurende één jaar)?
3. Kun je het verschil verklaren?

5 Gelijkwaardige rentevoeten

5.1 Voorbeeld

Bij samengestelde intrest is 6% per jaar *niet hetzelfde* als 0,5% per maand.

Neem bijvoorbeeld een beginkapitaal van 700 euro:

Rentevoet	Eindwaarde na 1 jaar	Eindwaarde na 20 jaar
0,5% per maand	$700 \cdot 1,005^{12} = 743,17$	$700 \cdot 1,005^{240} = 2317,14$
6% per jaar	$700 \cdot 1,06^1 = 742$	$700 \cdot 1,06^{20} = 2244,99$

Na 1 jaar brengt de maandelijks kapitalisatie reeds 1,17 euro *meer* op dan de jaarlijkse kapitalisatie.

Na 20 jaar loopt het verschil reeds op tot 72,15 euro!

De rentevoeten 0,5% per maand en 6% per jaar zijn dus *niet gelijkwaardig*.

Welke maandelijks rentevoet (i_{12}) is dan *wél* gelijkwaardig met 6% per jaar.

— Rentefactoren per maand en per jaar —

i_{12} = rentevoet per maand

u_{12} = maandelijks rentefactor).

i = rentevoet per jaar

u = jaarlijkse rentefactor).

i_{12} per maand en $i = 6\%$ per jaar moeten voor hetzelfde beginkapitaal $k = 700$ euro *dezelfde* eindwaarde opleveren na 1 jaar.

Dus:

$$700 \cdot u_{12}^{12} = 700 \cdot 1,06^1 \quad (8)$$

$$u_{12}^{12} = 1,06^1 \quad (9)$$

$$u_{12} = \sqrt[12]{1,06} = 1,004868 \quad (10)$$

Besluit: 6% per jaar brengt evenveel op als 0,4868% per maand.

— Maandelijks rentefactor —

De maandelijks rentefactor die gelijkwaardig is met 6% per jaar is:

$$\sqrt[12]{1,06}$$

Neem bijvoorbeeld een beginkapitaal van 700 euro:

Rentevoet	Eindwaarde na 1 jaar	Eindwaarde na 20 jaar
0,4868% per maand	$700 \cdot 1,004868^{12} = 742,00$	$700 \cdot 1,004868^{240} = 2245,24$
6% per jaar	$700 \cdot 1,06^1 = 742$	$700 \cdot 1,06^{20} = 2244,99$

Na 1 jaar zijn de eindwaarden hetzelfde. Er is een klein verschil na 20 jaar, te wijten aan *afrondingsfouten*.

Deze afrondingsfout kan kleiner gemaakt worden als je meer cijfers overhoudt in de berekening van de gelijkwaardige maandelijkse rentevoet.

$u_{12} = 1,004867551$ geeft een nauwkeuriger eindwaarde na 20 jaar:

$$700 \cdot 1,004867551^{240} = 2\,245,00 \approx 2\,244,99$$

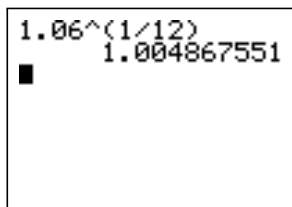
(\approx betekent *benaderend gelijk aan*)

5.2 Tip

Wortel als een macht

Je kunt n-de machtswortels ook berekenen zoals machten:

$$\sqrt[12]{1,06} = 1,06^{\frac{1}{12}} = 1,004867551 \quad (11)$$



1.06 \wedge (1 \div 12) Enter

5.3 Opdrachten

- 42 Welke semestriële rentevoet is gelijkwaardig met een jaarlijkse rentevoet van 6 %?
- 43 Welke maandelijkse rentevoet is gelijkwaardig met een jaarlijkse rentevoet van 6,25 %?
- 44 Welke jaarlijkse rentevoet is gelijkwaardig met een maandelijkse rentevoet van 0,4225 %?
- 45 Bereken:
1. $\sqrt[4]{1,0357}$
 2. $\sqrt[6]{1,12}$
 3. $\sqrt[12]{1,0723}$
 4. $\sqrt[120]{3,654}$
 5. $\sqrt[10]{2}$
- 46 Wat is de eindwaarde van 210 500 euro die gedurende 13 jaar uitgezet wordt tegen een samengestelde intrest van 5,24 % per jaar?
- 47 Wat is de eindwaarde van 4 000 euro die gedurende 5 jaar uitgezet wordt tegen een samengestelde intrest van 2,5 % per semester?

- 48 Wat is de eindwaarde van 21 600 euro die gedurende 3 jaar uitgezet wordt tegen een samengestelde intrest van 1,25% per trimester?
- 49 Welk kapitaal moeten we uitzetten op samengestelde intrest gedurende 5 jaar, tegen 6,10%, om na afloop van die tijd over 1 000 euro te beschikken?
- 50 Door semestriële kapitalisatie is een kapitaal van 23 650 euro na 10 jaar aangegroeid tot 39825,75 euro.
Wat is de gehanteerde rentevoet per semester?
- 51 We beleggen gedurende 7 jaar 1 180 euro aan 3,85% per jaar met jaarlijkse kapitalisatie.
Tegen welk procent moeten we datzelfde kapitaal gedurende dezelfde periode aan samengestelde intrest uitzetten om met *semestriële* kapitalisatie dezelfde eindwaarde te bekomen als bij de jaarlijkse kapitalisatie aan 3,85%?
- 52 Tien jaar geleden heeft de moeder van Sarah 625 euro op een voorhuwelijksspaarrekening uitgezet.
Nu is Sarah 23 jaar geworden en is het bedrag aangegroeid tot 1 270,28 euro.
Hoeveel bedroeg de jaarlijkse rentevoet?
- 53 Welke trimestriële rentevoet is gelijkwaardig met een jaarlijkse rentevoet van 3,76%?
- 54 Welke maandelijkse rentevoet is gelijkwaardig met een jaarlijkse rentevoet van 10,35%?
- 55 Welke jaarlijkse rentevoet is gelijkwaardig met een maandelijkse rentevoet van 1,13%?

Oplossingen van de opdrachten

- 1 (a) $4\% = 0.04$
(b) $21\% = 0.21$
(c) $6\% = 0.06$
(d) $3.75\% = 0.0375$
(e) $100\% = 1.00$
(f) $100\% + 6\% = 1.06$
(g) $100\% - 6\% = 0.94$
(h) $300\% = 3.00$
(i) $1\% = 0.01$

2 2.99 euro

3 544.50 euro

4 3 180 euro

5 Om het bedrag inclusief btw te berekenen moet je de maatstaf van heffing (het bedrag zonder btw vermenigvuldigen met 1.21.

De verhouding van het bedrag inclusief btw tot het bedrag exclusief btw is dus 1.21.

Je kunt dit ook nagaan als volgt:

$$\frac{1512,50}{1250} = 1.21$$

Deze berekening is echter overbodig, want je kon het antwoord al weten zonder enige berekening te maken.

6 7 872 euro

7 $\frac{23}{53} = 0.4340 = 43.40\%$

8 36 euro

9

$$\frac{43}{0.03} = 1\,433.33 \text{ euro}$$

10 De prijs van één nagelknipschaar met korting:

$$\frac{270}{24} = 11.25 \text{ euro}$$

De prijs van één nagelknipschaar zonder korting:

$$11.25 + 4 = 15.25 \text{ euro}$$

11 Deze wagen verbruikt 0.054 l/km. Je kunt dit getal gebruiken voor de berekeningen:

(a)

$$800 \cdot 0.054 = 43.2 \text{ l}$$

(b)

$$\frac{63 \text{ l}}{0.054 \text{ l/km}} = 1167 \text{ km}$$

12

$$\frac{14}{0.40} = 35 \text{ euro}$$

13 169.48 leerlingen volgen Duits. Percentage van de leerlingen die Spaans volgen: 26.7%.

14 1 253 645.83 euro

15 0.22 euro

16 1 227 euro

17 2 545.14 euro

18 (a) 3.344 jaar (of 3 jaar en 124 dagen).

(b) 7.6923 %

19

Bedrag	Intrestpercentage	Periode	Intrest
1 250 euro	8 %	6 weken	11.67 euro
9 800 euro	10 %	3 maand en 11 dagen	274.94 euro
4 200 euro	3.5 %	van 12/04 tot 15/09 = 18+31+30+31+15=125 dagen	50.34 euro

20 $k = 50$ euro en $2k = 100$ euro.

21 $k = 733.33$ euro en $2k = 933.33$ euro.

22 1. 83 dagen (17 + 31 + 30 + 5)

2. 444.62 euro

23 1. 132 dagen (25 + 30 + 31 + 30 + 16) te laat met betalen

2. 1 284.63 euro

- 24
1. 44 dagen (28 + 16)
 2. 8.73 euro

25 $110 \cdot 1.025^8 = 134.02$ euro

26 $110 \cdot 1.025^{28} = 998.25$ euro

- 27
1. Eindkapitaal na 8 jaar wachten: 134.02 euro
 2. Na 15 jaar: 159.31 euro
 3. Na 50 jaar: 378.08 euro
 4. Na 5 jaar en 7 maanden: 126.26 euro
 5. Na 90 jaar: 1015.17 euro

28

Tijd	K
3 jaar	1368.05
6 jaar en 20 dagen	1530.92
17 jaar en 6 maanden	2333.07

29 De jaarlijkse rentevoet bedraagt 5.2 %.

30 Je moet 16 jaar wachten tot het kapitaal verdubbeld (5 120 euro) is.

31 Ook 16 jaar.

32 De eindwaarde is 106 000.00 euro.

33 De eindwaarde na 20 semesters is 8 193.08 euro

34 De eindwaarde na 48 trimesters is 45 383.87 euro.

35 De eindwaarde na 18 maanden is 2 168.35 euro.

36 Het beginkapitaal is 401 225.52 euro.

37 De rentevoet is 3,00 % per semester.

- 38
1. tegen 6 % intrest *per jaar*: 106 000 euro
 2. tegen 3 % intrest *per semester*: 106 090 euro
 3. tegen 1.5 % intrest *per trimester*: 106 136.36 euro

4. tegen 0.5 % samengestelde intrest per maand: nog meer dan bij 6 % per jaar: 106 167.78 euro
5. Kapitalisatie tegen samengestelde intrest van 0.5 % per *maand* brengt *reeds na één maand* intrest op. Het kapitaal begint dus eerder te groeien.
Twaalf maal 0.5 % (of vier maal 1.5 % of twee maal 3 %) is wel gelijk aan 6 %, maar bij maandelijkse (of trimestriële of semestriële kapitalisatie wordt de intrest al *eerder* bij het kapitaal gevoegd en brengt dus ook al intrest op.

39 Tegen 1.05 % per trimester.

40 6.35 % per jaar

41

1. Een bedrag van 597 euro sparen tegen 1 % per maand brengt na 1 jaar 672.71 euro op. Dit is voordeliger.
2. Een bedrag van 600 euro sparen tegen 12 % per jaar brengt na 1 jaar 672.00 euro op.
3. In het eerste geval begint de kapitalisatie *eerder*: reeds na 1 maand. Deze intrest wordt al na 1 maand bij het kapitaal gevoegd en brengt zelf ook al intrest op vanaf de tweede maand. Hetzelfde gebeurt in de volgende maanden. Bij jaarlijkse kapitalisatie wordt de intrest *pas op het einde van het jaar* bij het kapitaal gevoegd.

42 $u_2 = \sqrt{1,06} = 1,02956$, dus de gelijkwaardige semestriële rentevoet is $i_{12} = 2,956\%$ per semester.

43 $u_{12} = \sqrt[12]{1,0625} = 1,005065$, dus $i_{12} = 0,5065\%$ per maand.

44 $u = 1,004225^{12} = 1,0519$; dus $i = 5,19\%$ per jaar.

- 45**
1. 1,008808
 2. 1,019068
 3. 1,005834
 4. 1,010857
 5. 1,071773

46 De eindwaarde is 408 886,73 euro.

47 De eindwaarde na 10 semesters is 5 120,34 euro

48 De eindwaarde na 12 trimesters is 25 072,30 euro.

49 Het beginkapitaal is 743,74 euro.

50 De rentevoet is 2,64 % per semester.

51 Tegen 1,9068 % per semester

52 7,35 % per jaar

53 $u_4 = \sqrt[4]{1,0376} = 1,00927$, dus $i_4 = 0,927\%$ per trimester.

54 $u_{12} = \sqrt[12]{1,1035} = 1,008241$, dus $i_{12} = 0,8241\%$ per maand.

55 $u = 1,0113^{12} = 1,144353$; dus $i = 14,4353\%$ per jaar.