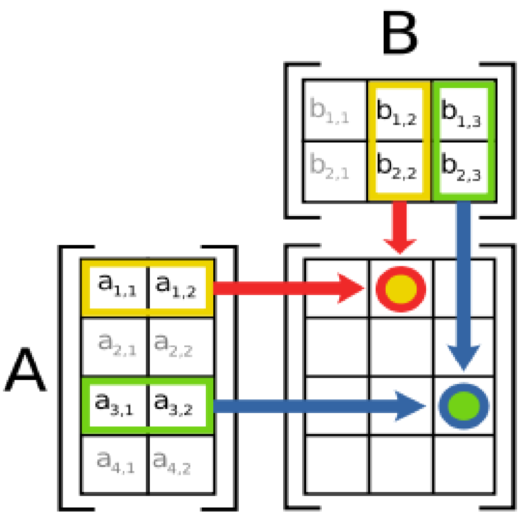
Matrixrekenen

Wilfried Van Hirtum

Versie 1.22

11 februari 2021



Bronvermelding

Dank aan de enthousiaste student Mieke en fotograaf Irène Deswert voor de toestemming van het gebruik van de foto

Met dank aan de nuttige opmerkingen van de leerlingen van Industriële Wetenschappen van Westerlo

Inhoudsopgave

Voorwoord

Le vrai voyage de découverte
ne consiste pas à chercher de nouveaux paysages,
mais à avoir des yeux neufs.

— Marcel Proust

— Foto: Savatore Dinicola

Dit is een ode aan de baarmoeder.
Het latijnse woord voor dit vrouwelijk wonder is *matrix*.
Wij bekijken matrices als cocons van getallen.
Bekijk het met verschillende ogen, en je ontdekt misschien nieuwe dingen.
Nog veel wiskundeplezier met deze ontdekkingstocht.

Wilfried Van Hirtum

1 Wat zijn matrices?

Een matrix is eenvoudigweg een vierkante of een rechthoekige tabel met getallen, meestal genoteerd tussen vierkante haken.

Voorbeelden

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \\ 0 & 4 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

een 3×3 matrix — een $\underset{\#\text{ rijen}}{2} \times \underset{\#\text{ kolommen}}{3}$ matrix — een 4×2 matrix — een 2×2 matrix

In dit voorbeeld, **A** is een matrix met drie rijen en drie kolommen, en we noemen haar een 3×3 matrix. Matrix **B** is een 2×3 matrix, want zij heeft twee rijen en drie kolommen. We vermelden *eerst* het aantal *rijen*. De matrices **A** en **D** zijn *vierkante* matrices.

Matrixdimensie

Een $m \times n$ matrix heeft m rijen, en n kolommen. Vermeld *eerst* het aantal *rijen*.

We noteren de naam van een matrix (bijv. **A**) in *hoofdletters*. De *elementen* van een matrix, dus de afzonderlijke getallen in de matrix, worden met een kleine letter geschreven.

Je schrijft een algemene $m \times n$ matrix als

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ a_{m-1,1} & a_{m-1,2} & \cdots & \cdots & a_{m-1,n} \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Het element a_{ij} van de matrix **A** is het element in de i-de rij en in de j-de kolom.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} \phantom{a_{m-1,1}} & \phantom{a_{m-1,2}} & \text{kolom 3} & & \phantom{a_{m-1,n}} \\ & & \downarrow & & \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ \text{rij 2} \longrightarrow \\ \\ \\ \\ \end{array} & \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ a_{m-1,1} & a_{m-1,2} & \cdots & \cdots & a_{m-1,n} \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}. \end{array}$$

Bijvoorbeeld, a_{23} is het element van matrix **A** dat op de *tweede rij* staat, en in *kolom drie*.

2 Waarvoor dienen matrices?

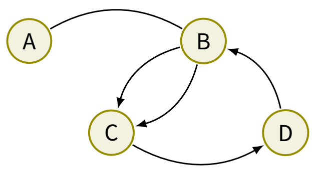
Je gebruikt matrices in de techniek en wetenschappen om informatie op te slaan, en er bepaalde berekeningen mee te doen.
Hier zijn enkele vooorbeelden.

Uitgebreide matrix van een stelsel

$$\begin{cases} 3x+2y+z=39 \\ 2x+3y+z=34 \\ x+2y+3z=26 \end{cases} \qquad \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 39 \\ 2 & 3 & 1 & 34 \\ 1 & 2 & 3 & 26 \end{array}\right] \end{array} \xrightarrow{\text{rref}} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 9.25 \\ 0 & 1 & 0 & 4.25 \\ 0 & 0 & 1 & 2.75 \end{array}\right] \end{array}.$$

Directe-wegenmatrix

Dit is een netwerk tussen vier plaatsen A, B, C, D.



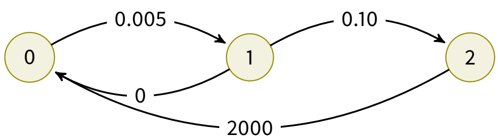
En dit is de bijbehorende
directe-wegenmatrix **D** van dit netwerk.

$$\mathbf{D} = \text{Naar} \quad \begin{array}{c|cccc} & \multicolumn{4}{c}{\text{Van}} \\ & A & B & C & D \\ \hline A & 0 & 1 & 0 & 0 \\ B & 1 & 0 & 0 & 1 \\ C & 0 & 2 & 0 & 0 \\ D & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

Van B naar C zijn er 2 wegen, maar van C naar B *geen enkele*.

Lesliematrix van een zalmsoort

Deze *graaf* hoort bij een zalmensoort met drie leeftijdscategorieën: 0-jarigen, 1-jaringen en 2-jarigen.



En dit is de bijbehorende *Lesliematrix* **L**.

$$\mathbf{L} = \text{Naar} \quad \begin{array}{c} \\ \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} \text{Van} \\ \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2000 \\ 0.005 & 0 & 0 \\ 0 & 0.10 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \longleftarrow \text{vruchtbaarheidscijfers}$$

overlevingskansen

Alleen de 2-jarige zalmen zijn vruchtbaar, maar dan leggen ze wel ineens veel (2000) eieren. De piepjonge zalmen sterven massal in hun eerste levensjaar, in het tweede levensjaar overleeft ook maar 10 %.

Puntentelling in de sport / Product van twee matrices

De matrices **P** en **G** bevatten de behaalde punten per proef, en de gewichten per proef. Proef 3 weegt dubbel zo zwaar door als proeven 1 en 2.

$$\mathbf{G} \quad \begin{array}{c} \text{Proef 1} \\ \text{Proef 2} \\ \text{Proef 3} \end{array} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P} \quad \begin{array}{c|ccc} & \text{Proef 1} & \text{Proef 2} & \text{Proef 3} \\ \hline \text{BEL} & \\ \text{MEX} & \\ \text{NED} & \\ \text{KOR} & \end{array} \begin{bmatrix} 3 & 6 & 2 \\ 3 & 6 & 1 \\ 3 & 0 & 5 \\ 3 & 0 & 4 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{T} \quad \begin{array}{c} \text{BEL} \\ \text{MEX} \\ \text{NED} \\ \text{BEL} \end{array} \begin{bmatrix} 13 \\ 11 \\ 13 \\ 11 \end{bmatrix}$$

Door de matrices **P** en **G** te *vermenigvuldigen* (rij maal kolom), bekom je de matrix **T** met het *totaal* aantal behaalde punten voor elk deelnemend land.

Opslaan van informatie over bestelllingen / Som van twee matrices

De bedrijven *Pfizer* en *Janssen* leveren vaccins in twee ziekenhuizen.

$$\mathbf{A}\ \begin{array}{c} \\ \text{Ma} \\ \text{Di} \\ \text{Do} \\ \text{Vr} \end{array} \begin{array}{c} \text{Pfizer} \quad \text{Janssen} \\ \begin{bmatrix} 120 & 200 \\ 90 & 200 \\ 50 & 200 \\ 100 & 300 \end{bmatrix} \end{array} + \mathbf{B}\ \begin{array}{c} \\ \text{Ma} \\ \text{Di} \\ \text{Do} \\ \text{Vr} \end{array} \begin{array}{c} \text{Pfizer} \quad \text{Janssen} \\ \begin{bmatrix} 30 & 100 \\ 20 & 100 \\ 20 & 100 \\ 20 & 100 \end{bmatrix} \end{array} = \mathbf{C}\ \begin{array}{c} \\ \text{Ma} \\ \text{Di} \\ \text{Do} \\ \text{Vr} \end{array} \begin{array}{c} \text{Pfizer} \quad \text{Janssen} \\ \begin{bmatrix} 150 & 300 \\ 110 & 300 \\ 70 & 300 \\ 120 & 400 \end{bmatrix} \end{array}$$

Matrix **C** is de *som* van het aantal geleverde vaccins. Je kunt dus matrices *optellen*, maar dan moeten ze natuurlijk *dezelfde dimensie* hebben.
Het optellen gebeurt rij per rij, en alle rijen moeten even lang zijn.

Scalaire vermenigvuldiging

Het bedrijf *AstraZenica* levert een aantal vaccins aan de Chiro van Zoerle-Parwijs.

$$\mathbf{A}\ \begin{array}{c} \\ \text{Wo} \\ \text{Do} \\ \text{Vr} \end{array} \begin{array}{c} \text{Leden} \quad \text{Leiding} \\ \begin{bmatrix} 20 & 4 \\ 30 & 4 \\ 20 & 4 \end{bmatrix} \end{array}$$

Maar omdat de Chiro veel vrijwilligerswerk doet in het woonzorgcentrum in de buurt, heeft *AstraZenica* uiteindelijk 50 % meer vaccins geleverd.

$$1.50 \cdot \mathbf{A}\ \begin{array}{c} \\ \text{Wo} \\ \text{Do} \\ \text{Vr} \end{array} \begin{array}{c} \text{Leden} \quad \text{Leiding} \\ \begin{bmatrix} 20 & 4 \\ 30 & 4 \\ 20 & 4 \end{bmatrix} \end{array} = \mathbf{A}\ \begin{array}{c} \\ \text{Wo} \\ \text{Do} \\ \text{Vr} \end{array} \begin{array}{c} \text{Leden} \quad \text{Leiding} \\ \begin{bmatrix} 30 & 6 \\ 45 & 6 \\ 30 & 6 \end{bmatrix} \end{array}$$

Elk getal van matrix **A** wordt vermenigvuldigd met het getal (scalar) 1.50. Daarom heet deze vermenigvuldiging: *scalaire vermenigvuldiging*, oftwel vermenigvuldiging met een *scalar*.

Coderen van geheime informatie

- Boodschapmatrix $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} h & e \\ l & p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 12 & 16 \end{bmatrix}$

Er is gecodeerd volgens alfabet a = 1, b = 2, c = 3, …

a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*	*h*	*i*	*j*	*k*	*l*	*m*	*n*	*o*	*p*	*q*	*r*	*s*	*t*	*u*	*v*	*w*	*x*	*y*	*z*
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26

- Coderingsmatrix $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}$

De oorspronkelijke boodschap **B** wordt *rechts vermenigvuldigd* met de coderingsmatrix **C**, die geheim moet blijven tussen twee mensen.

Zo ontstaat een onherkenbare boodschap **A**.

- Versleutelde boodschap $\mathbf{A} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 41 & 69 \\ 104 & 180 \end{bmatrix}$

Deze matrix **A** bevat getallen groter dan 26 en heeft dus geen betekenis als letters van het alfabet. De oorspronkelijke boodschap *help* is dus versleuteld. Je kunt hem gerust openbaar versturen: niemand kan deze boodschap lezen, tenzij … deze matrix **A** terug *rechts* vermenigvuldigd wordt met de *inverse* matrix $\mathbf{C}^{-1}$.

- Inverse van de coderingsmatrix $\mathbf{C}^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -\frac{5}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$

3 Soorten van matrices

Men onderscheidt de volgende types van matrices.

Op basis van de vorm

Rijmatrix en kolommatrix

Een *rijmatrix* is een matrix die bestaat uit *één rij*. Bijvoorbeeld,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 20 & 22 & 34 & 45 \end{bmatrix}.$$

Een *kolommatrix* is een matrix die bestaat uit *één kolom*. Bijvoorbeeld,

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 20 \\ 22 \\ 34 \\ 45 \end{bmatrix} = \mathbf{A}^T.$$

Als je alle rijen van een matrix schrijft als kolommen, dan heb je de matrix *getransponeerd*. We noteren de getransponeerde matrix als $\mathbf{A}^T$. De getransponeerde van een rijmatrix is dus een kolommatrix, en omgekeerd.

Transponeren

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 & 10 \\ 2 & 5 & 8 & 11 \\ 3 & 6 & 7 & 12 \end{bmatrix}$$

De hoofddiagonaal blijft staan bij het transponeren. Alle andere elementen worden *gespiegeld* ten opzichte van de *hoofddiagonaal*.
Rijen worden kolommen, en omgekeerd.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 & 10 \\ 2 & 5 & 8 & 11 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{array}{c} \\ \text{Ma} \\ \text{Di} \\ \text{Do} \\ \text{Vr} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{Pfizer} & \text{Janssen} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 120 & 200 \\ 90 & 200 \\ 50 & 200 \\ 100 & 300 \end{bmatrix} \end{array} \qquad \mathbf{B}^T = \begin{array}{c} \\ \text{Pfizer} \\ \text{Janssen} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \text{Ma} & \text{Di} & \text{Do} & \text{Vr} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 120 & 90 & 50 & 100 \\ 200 & 200 & 200 & 300 \end{bmatrix} \end{array}$$

De bestelling van *Pfizer* vormt een *kolom*.
Bij het transponeren wordt de bestelling van *Pfizer* een *rij*.
Idem voor de bestelling van *Janssen*.

Vierkante matrix

Een *vierkante* matrix heeft evenveel rijen als kolommen. Zij heeft dus een vierkante vorm. Bijvoorbeeld,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 & 12 \\ 3 & 9 & 0 & 19 \\ -1 & 6 & 1.5 & -3 \\ 4 & 5 & 6 & -4 \end{bmatrix}.$$

De matrix **A** is een vierkante matrix van *orde 4*.

Diagonaalmatrix

Een *diagonaalmatrix* is een vierkante matrix met *allemaal nullen buiten de hoofddiagonaal*.
Bijvoorbeeld,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}.$$

hoofddiagonaal

Op basis van de inhoud

Eenheidsmatrix

Een *eenheidsmatrix* is een diagonaalmatrix met allemaal *enen op de hoofddiagonaal*.
Bijvoorbeeld,

$$\mathbf{I}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad \mathbf{I}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad \mathbf{I}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

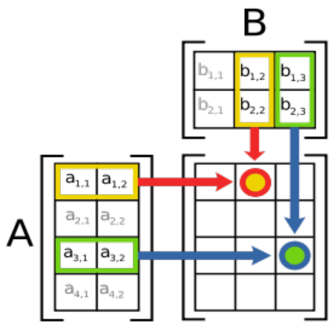
Symmetrische matrix

Een *symmetrische matrix* is gelijk aan zijn eigen getransponeerde.
De *diagonaal* is dus een *symmetrie-as* van de matrix.
Bijvoorbeeld,

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & -1.7 \\ 5 & 16 & 3 \\ -1.7 & 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

4 Het matrixproduct

Algemeen principe *rij · kolom*



Om het matrixproduct $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ te bekomen, moet je elke *rij* van **A** met elke *kolom* van **B** vermenigvuldigen.

Je kunt de matrices **A** en **B** best noteren met behulp van de *schema van Falk*.

Schrijf de eerste matrix **A** *links onder* (laag genoeg beginnen zodat rechts boven nog plaats is voor matrix **B**), en schrijf de tweede matrix **B** *rechts boven*.

Rechts onder is dan precies plaats voor het matrixproduct $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$.

De dimensie van de productmatrix klopt dan automatisch.

Dimensie van het matrixproduct

Je kunt alleen een

m × n matrix vermenigvuldigen met een n × p matrix.

Deze dimensies moeten gelijk zijn.

Het resultaat is een $m \times p$ matrix.

Bijvoorbeeld, (3 × 4) · (4 × 2)

Geeft een 3 × 2 matrix.

Voorbeeld

Gegeven, twee matrices,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ -1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & -2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 10 & 5 \\ 20 & 6 \\ 30 & 7 \\ 40 & 8 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{array}{cc} & \mathbf{B} \\ & \begin{bmatrix} 10 & 5 \\ 20 & 6 \\ 30 & 7 \\ 40 & 8 \end{bmatrix} \\ \mathbf{A} & \mathbf{A}\cdot\mathbf{B} \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ -1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & -2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 120 & 28 \\ 170 & 33 \\ 50 & 17 \end{bmatrix} \end{array}$$

Het element $(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})_{1,1} = 120$ bijvoorbeeld, komt van het zogenaamde *scalair product*

$$(1,2,-3,4)\boldsymbol{\cdot}(10,20,30,40) = (1\cdot 10) + (2\cdot 20) + (-3\cdot 30) + (4\cdot 40) = 120.$$

Doe dit voor elke mogelijke combinatie van een *rij* van $\mathbf{A}$ en een *kolom* van $\mathbf{B}$. De plaats die voorzien is voor het product $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$ wordt op die manier helemaal benut.

Bijvoorbeeld,

$$\begin{array}{cc} & \mathbf{B} \\ & \begin{bmatrix} 10 & 5 \\ 20 & 6 \\ 30 & 7 \\ 40 & 8 \end{bmatrix} \\ \mathbf{A} & \mathbf{A}\cdot\mathbf{B} \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ -1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & -2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 120 & 28 \\ 170 & 33 \\ 50 & 17 \end{bmatrix} \end{array}$$

En nog bijvoorbeeld,

$$\begin{array}{cc} & \mathbf{B} \\ & \begin{bmatrix} 10 & 5 \\ 20 & 6 \\ 30 & 7 \\ 40 & 8 \end{bmatrix} \\ \mathbf{A} & \mathbf{A}\cdot\mathbf{B} \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ -1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & -2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 120 & 28 \\ 170 & 33 \\ 50 & 17 \end{bmatrix} \end{array}$$

Het matrixproduct is *niet* commutatief

Tegenvoorbeeld, reken zelf na.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 30 & 36 & 42 \\ 66 & 81 & 96 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B}\cdot\mathbf{A} \text{ bestaat niet!}$$

$$\begin{array}{cc} & \mathbf{B} \\ & \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \\ \mathbf{A} & \mathbf{A}\cdot\mathbf{B} \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 30 & 36 & 42 \\ 66 & 81 & 96 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$(\,2 \times 3\,)\boldsymbol{\cdot}(\,3 \times 3\,)$$

Oké

Geeft een 2×3 matrix.

Maar $\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}$ *bestaat niet*.

$$(\,3 \times 3\,)\cdot(\,2 \times 3\,)$$

Niet oké

5 Opdrachten

1 Van welke soort zijn de volgende matrices? Kies uit: 4×2 matrix, vierkante matrix, eenheidsmatrix, symmetrische matrix, diagonaalmatrix, kolommatrix, rijmatrix, nulmatrix, antisymmetrische matrix. Bij sommige matrices zijn er meerdere mogelijkheden.

(a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(b) $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & 13 & 0 \\ 0 & 0 & 0.25 \end{bmatrix}$

(c) $\mathbf{D} = \begin{bmatrix} -2 & 6 & 4 & 12 & 3 & 5 \end{bmatrix}$

(d) $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 5 \\ -3 & 1 & 0 \\ -5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(e) $\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$

(f) $\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

(g) $\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}$

(h) $\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

2 Gegeven, de matrix $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 13 & -5 & 8 & 0 \\ 0.25 & 4 & 10 & -7 \end{bmatrix}$.

Vul het gevraagde element in.

(a) $a_{23} = \ldots$

(b) $a_{14} = \ldots$

(c) $a_{\ldots\ldots} = 4$

(d) $a_{\ldots\ldots} = -7$

3

(a) Maak de matrix **A** die voldoet aan de volgende voorwaarden:

- **A** is een 3×4 matrix;
- $a_{ij} = i + j$.

(b) Maak de matrix **B** die voldoet aan de volgende voorwaarden:

- **B** is een 3×7 matrix;
- $b_{ij} = j$.

4

(a) Bepaal een voorschrift voor de elementen c_{ij} van de matrix **C**.

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \\ 20 & 21 & 22 & 23 & 24 \\ 30 & 31 & 32 & 33 & 34 \\ 40 & 41 & 42 & 43 & 44 \end{bmatrix}$$

(b) Bepaal een voorschrift voor de elementen d_{ij} van de matrix **D**.

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 8 \\ 3 & 9 & 27 \\ 4 & 16 & 64 \end{bmatrix}$$

(c) Bepaal een voorschrift voor de elementen e_{ij} van de matrix **E**.

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 & -3 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(d) Bepaal een voorschrift voor de elementen f_{ij} van de matrix **F**.

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \\ 4 & 8 & 12 & 16 \end{bmatrix}$$

6 Inverse matrix

De identieke matrix, een specialleke

De eenheidsmatrix speelt een speciale rol bij de vermenigvuldiging van matrices.

Bijvoorbeeld,

Gegeven,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}.$$

Het effect van het vermenigvuldigen van deze matrix **A** met de eenheidsmatrix, is dat het product *identiek* is aan de oorspronkelijke matrix. We krijgen dezelfde matrix terug.

$$\begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \end{array}$$

Dus, we hebben

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{I} = \mathbf{A}.$$

Hetzelfde effect treedt op als we **A** *links* vermenigvuldigen met de eenheidsmatrix.

$$\begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \end{array}$$

Dus, we hebben ook

$$\mathbf{I} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A}.$$

Neutraal element voor de vermenigvuldiging van matrices

De *eenheidsmatrix* oftewel de *identieke matrix* is een neutrale matrix voor de vermenigvuldiging van matrices.

$$\mathbf{I} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{I}$$

Links of rechts vermenigvuldigen van een matrix **A** met de *Identieke matrix* geeft identiek dezelfde matrix **A**.

Met getallen is dat ook zo, dat wist je al:

$$x \cdot 1 = x = x \cdot 1.$$

Het getal 1 is dus ook een neutraal getal voor de vermenigvuldiging van getallen.

Het omgekeerde van een getal

Bij getallen kun u zich ook afvragen wat het *omgekeerde* getal is van een gegeven getal.

Bijvoorbeeld, wat is het omgekeerde van 5? Dit komt neer op het oplossen van de volgende vergelijking

$$5 \cdot \boxed{x} = \boxed{1}. \tag{1}$$

We kennen de oplossing, namelijk $x = 0.2$. We zeggen dus,

$$\boxed{5^{-1} = 0.2}$$

We zien dat in vergelijking (1) het *identiek element* 1 een belangrijke rol speelt.

We kunnen iets gelijksaardigs doen met matrices.

De inverse matrix van een matrix

Gegeven, een matrix

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Vind nu een matrix $\mathbf{X}$, zodat

$$\mathbf{A} \cdot \boxed{\mathbf{X}} = \boxed{\mathbf{I}}.$$

Als zo'n matrix $\mathbf{X}$ bestaat, noemen we deze matrix de inverse matrix van matrix $\mathbf{A}$.

We gaan op zoek naar deze matrix $\mathbf{X}$.

We hebben dus *vier onbekenden*

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x & z \\ y & t \end{bmatrix},$$

en er moet gelden, dat

$$\mathbf{A} \cdot \boxed{\mathbf{X}} = \boxed{\mathbf{I}},$$

oftwel

$$\begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} x & z \\ y & t \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2x+5y & 2z+5t \\ 1x+3y & 1z+3t \end{bmatrix} \end{array} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

We hebben dus eigenlijk twee stelsels op te lossen

$$\begin{cases} 2x+5y=1 \\ 1x+3y=0 \end{cases} \qquad \begin{array}{cc|c} x & y & \\ \hline 2 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{array} \xrightarrow{\text{rref}} \begin{array}{cc|c} x & y & \\ \hline 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{array} \rightarrow \boxed{\begin{cases} x = 3 \\ y = -1 \end{cases}}$$

$$\begin{cases} 2z+5t=0 \\ 1z+3t=1 \end{cases} \qquad \begin{array}{cc|c} z & t & \\ \hline 2 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{array} \xrightarrow{\text{rref}} \begin{array}{cc|c} z & t & \\ \hline 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 2 \end{array} \rightarrow \boxed{\begin{cases} z = -5 \\ t = 2 \end{cases}}$$

Besluit, de inverse matrix $\mathbf{X}$ bestaat, en is gelijk aan

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Spilmethode gebruiken

Om de inverse matrix te zoeken, moet je dus twee stelsels oplossen.

$$
\begin{cases} 2x + 5y = 1 \\ 1x + 3y = 0 \end{cases}
\qquad
\begin{array}{c}
\begin{array}{cc} x & y \end{array} \\
\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{array}\right]
\end{array}
$$

$$
\begin{cases} 2z + 5t = 0 \\ 1z + 3t = 1 \end{cases}
\qquad
\begin{array}{c}
\begin{array}{cc} z & t \end{array} \\
\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{array}\right]
\end{array}
$$

Merk op dat beide stelsels *dezelfde coëfficiënten* hebben (getallen vóór de verticale streep),

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix},$$

maar andere kolommen van de bekende termen

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ en } \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

De twee kolommen van de bekende termen vormen samen de eenheidsmatrix

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Omdat de coëfficiënten van beide stelsels *dezelfde zijn*, kunnen we beide stelsels *gelijktijdig* oplossen. Dit gaat als volgt.

Gegeven,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Schematisch

$$
\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 5 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad \begin{array}{c} 8 \\ 5 \end{array}
\qquad\qquad
\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{I} \end{array}\right]
$$

$$
\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right] \quad \begin{array}{cc} 8 & \checkmark \\ 2 & \checkmark \end{array}
\qquad\qquad
\vdots
$$

$$
\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 6 & -10 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right] \quad \begin{array}{cc} -2 & \checkmark \\ 2 & \checkmark \end{array}
\qquad\qquad
\downarrow
$$

$$
\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right] \quad \begin{array}{cc} -1 & \checkmark \\ 2 & \checkmark \end{array}
\qquad\qquad
\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{I} & \mathbf{A}^{-1} \end{array}\right]
$$

Besluit,

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Sommige matrices hebben *geen* inverse

Bijvoorbeeld, Gegeven,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad \begin{array}{c} 3 \\ 3 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right] \quad \begin{array}{cc} 3 & \checkmark \\ 0 & \checkmark \end{array}$$

Vals stelsel!

Schematisch

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{I} \end{array}\right]$$

$$\vdots$$

$$\downarrow$$

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{I} & \mathbf{A}^{-1} \text{ bestaat niet.} \end{array}\right]$$

Besluit: $\mathbf{A}^{-1}$ bestaat niet.

We zeggen: matrix $\mathbf{A}$ is *singulier* oftwel, matrix $\mathbf{A}$ is *niet inverteerbaar*.

Matrices die wél inverteerbaar zijn, heten *regulier*.

Schema voor het berekenen van de inverse matrix

Zet de gegeven matrix $\mathbf{A}$ *links*, en ernaast de *identieke matrix* $\mathbf{I}$.

Doe de spilmethode.

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{I} \end{array}\right]$$

$$\vdots$$

$$\downarrow$$

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{I} & \mathbf{A}^{-1} \end{array}\right]$$

En op het einde heb je de *Identieke matrix links*, met ernaast de inverse matrix, als die bestaat.

Opmerking: kies de spillen steeds op de *hoofddiagonaal*. Desnoods moet je *rijen verwisselen* om de spil op de hoofddiagonaal te kunnen kiezen.

De inverse matrix is uniek

Een matrix kan hoogstens één inverse matrix hebben.

Stel dat $\mathbf{B}$ en $\mathbf{C}$ beide inverse matrices zijn van een gegeven matrix $\mathbf{A}$,
dus $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{I}$ en $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{I}$,
en ook $\mathbf{A} \cdot \mathbf{C} = \mathbf{I}$ en $\mathbf{C} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{I}$.

Dan geldt

$$\mathbf{C} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{I} = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (\mathbf{C} \cdot \mathbf{A}) \cdot \mathbf{B} = \mathbf{I} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B}$$

Dus $\mathbf{C} = \mathbf{B}$ $\square$

5 Bereken de inverse matrix.

(a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

(b) $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$

(c) $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

(d) $\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -5 & 0 & 5 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$

(e) $\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

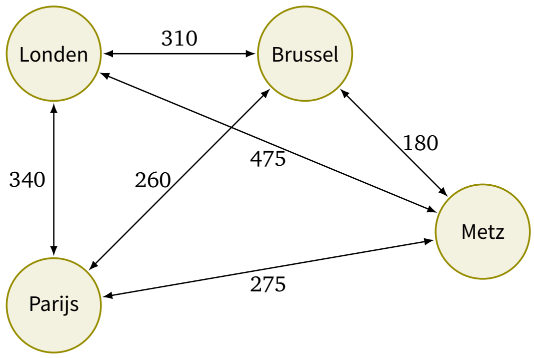
(f) $\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$

(g) $\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}$

(h) $\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(i) $\mathbf{K} = \begin{bmatrix} -2 & 3.5 & -2.5 \\ 0 & 0.5 & -0.5 \\ 3 & -5 & 4 \end{bmatrix}$

6



In dit schema staan de afstanden tussen enkele steden weergegeven.

Stel met deze gegevens een afstandenmatrix op. Noteer de steden in alfabetische volgorde.

7 Gegeven,

- Boodschapmatrix $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} h & e \\ l & p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 12 & 16 \end{bmatrix}$,

er is gecodeerd volgens alfabet a = 1, b = 2, c = 3, ...

a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*	*h*	*i*	*j*	*k*	*l*	*m*	*n*	*o*	*p*	*q*	*r*	*s*	*t*	*u*	*v*	*w*	*x*	*y*	*z*
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26

- Coderingsmatrix $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}$.

(a) Bereken het matrixproduct $\mathbf{A} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}$.

(b) Deze matrix bevat getallen groter dan 26 en heeft dus geen betekenis als letters van het alfabet. De oorspronkelijke boodschap *help* is dus versleuteld. Je kunt hem gerust openbaar versturen: niemand kan deze boodschap lezen, tenzij ... deze matrix **A** terug vermenigvuldigd wordt met ... welke matrix?

(c) Bereken deze matrix $\mathbf{C}^{-1}$.

(d) Bereken nu het matrixproduct $\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}^{-1}$. Herken je nu terug het oorspronkelijke bericht?

(e) Ontcijfer de boodschap $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 29 & 45 \\ 125 & 216 \end{bmatrix}$, die versleuteld is met dezelfde coderingsmatrix $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}$.

8 Je krijgt een e-mail met de geheime boodschap $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 117 & 61 \\ 156 & 86 \end{bmatrix}$ die versleuteld is met de Coderingsmatrix $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$.

Ontcijfer deze boodschap door matrix **A** te vermenigvuldigen met de inverse matrix $\mathbf{C}^{-1}$.

Er is gecodeerd volgens alfabet $a = 1, \quad b = 2, \quad c = 3, \quad \ldots$

a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*	*h*	*i*	*j*	*k*	*l*	*m*	*n*	*o*	*p*	*q*	*r*	*s*	*t*	*u*	*v*	*w*	*x*	*y*	*z*
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26

9 Samira moet inkopen doen voor een klasfeestje. Zij koopt onder andere drie soorten chips: zout, paprika en bolognèse. Van elk van deze soorten koopt zij enkele zakken van het bekende merk "Krocy" en ook enkele zakken van de "gele producten". De prijzenmatrix P en de aantallen matrix **A** staan hieronder:

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c} \\ \text{Kro} \\ \text{gele} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{zout} & \text{pap} & \text{bol} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 30 & 32 & 35 \\ 17 & 20 & 23 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\mathbf{A} = \begin{array}{c} \\ \text{zout} \\ \text{pap} \\ \text{bol} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{Kro} & \text{gele} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \end{array}$$

Gevraagd:

(a) Bereken van $\mathbf{P} \cdot \mathbf{A}$ de elementen van de hoofddiagonaal.
Wat is de betekenis van deze elementen?

(b) Bereken ook van $\mathbf{A} \cdot \mathbf{P}$ de elementen van de hoofddiagonaal.
Wat is de betekenis van deze elementen?

(c) Waarom hebben de overige elementen van $\mathbf{P} \cdot \mathbf{A}$ en van $\mathbf{A} \cdot \mathbf{P}$ geen betekenis?

(d) Waarom zijn de elementen op de hoofddiagonaal van $\mathbf{P} \cdot \mathbf{A}$ en van $\mathbf{A} \cdot \mathbf{P}$ zijn gelijk?

10 Van de twee klassen 5IW en 5HW zijn de resultaten van een test wiskunde gegeven in de matrix **R**:

$$\mathbf{R} = \begin{array}{c} \\ \text{5IW} \\ \text{5HW} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 6 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Gevraagd:

(a) Stel een matrix **A** op zodat $\mathbf{R} \cdot \mathbf{A}$ aangeeft hoeveel zevens per klas gescoord zijn.

(b) Stel een matrix **B** op zodat $\mathbf{R} \cdot \mathbf{B}$ aangeeft hoeveel voldoendes per klas gescoord zijn.

(c) Stel een matrix **C** op zodat $\mathbf{R} \cdot \mathbf{C}$ aangeeft hoeveel leerlingen elke klas heeft.

(d) Stel een matrix **D** op zodat $\mathbf{R} \cdot \mathbf{D}$ aangeeft hoeveel punten totaal per klas gescoord zijn.

(e) Stel een matrix **E** op zodat $\mathbf{E} \cdot \mathbf{R}$ aangeeft hoeveel vieren, hoeveel vijven, hoeveel zessen, ... de twee klassen samen gescoord hebben.

11 Pugo Van Hraag heeft drie filialen. In een week is bijgehouden hoeveel wasautomaten van de merken Miesens, Schob, Kaubnecht en Lieme verkocht zijn. Zie de verkoopmatrix **V**.

$$\mathbf{V} = \begin{array}{c} \\ \text{fil1} \\ \text{fil2} \\ \text{fil3} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \text{M} & \text{S} & \text{K} & \text{L} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 10 & 12 & 8 & 4 \\ 7 & 8 & 5 & 2 \\ 8 & 8 & 6 & 2 \end{bmatrix} \end{array}$$

De inkoopprijs van een wasautomaat van merk Miesens is 400 euro, van merk Schob 275 euro, van merk Kaubnecht 600 euro en van merk Lieme 900 euro. De verkoopprijs van een wasautomaat is respectievelijk 500 euro, 400 euro, 800 euro en 1200 euro.
Gevraagd:

(a) Verwerk de gegevens over de inkoop- en verkoopprijzen in een prijzenmatrix **P** zodat $\mathbf{V} \cdot \mathbf{P}$ betekenis heeft.

(b) Bereken $\mathbf{V} \cdot \mathbf{P} = \mathbf{T}$. Geef een interpretatie aan het element t_{12}.

(c) Bedenk een matrix **Q** zodat $\mathbf{Q} \cdot \mathbf{T}$ informatie geeft over het totale bedrag dat de drie filialen samen voor de inkoop hebben betaald en over het totale verkoopsbedrag van de drie filialen samen.

(d) Bedenk een matrix **D** zodat met behulp van een gepast matrixproduct de totale winst die de drie filialen deze week samen gemaakt hebben op de wasautomaten, kan worden berekend.

(e) Bereken deze winstmatrix **W**.

12 Een bungalowpark heeft drie typen huisjes: A, B en C. De verhuurprijs van de huisjes is afhankelijk van het seizoen. Men onderscheidt:

- Laagseizoen (LS)
- Middenseizoen (MS)
- Hoogseizoen (HS)

Matrix **P** geeft de weekprijzen weer. De matrix **N** geeft de aantallen van elk type huisje in het park weer.

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c} \\ \text{LS} \\ \text{MS} \\ \text{HS} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{A} & \text{B} & \text{C} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 324 & 221 & 261 \\ 378 & 266 & 320 \\ 486 & 351 & 428 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\mathbf{N} = \begin{array}{c} \text{A} \\ \text{B} \\ \text{C} \end{array} \begin{bmatrix} 40 \\ 30 \\ 20 \end{bmatrix}$$

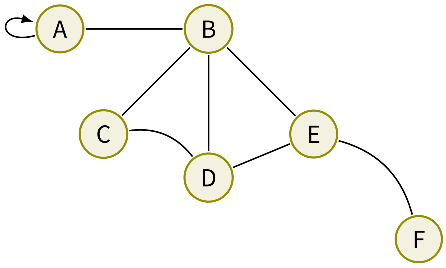
Gevraagd:

(a) Bereken $\mathbf{P} \cdot \mathbf{N}$. Wat is de betekenis van de elementen van $\mathbf{P} \cdot \mathbf{N}$?

(b) In één week van het jaar worden geen huisjes verhuurd omwille van groot onderhoud. De overige 51 weken worden gelijk verdeeld over de seizoenen LS, MS en HS.
In de praktijk blijkt dat in het laagseizoen elke week 50 % van de huisjes (ongeacht het type) verhuurd zijn , in het middenseizoen 80 % en in het hoogseizoen 90 %.
Stel een 1×3 matrix **F** op, die informatie geeft over de verhuurpercentages en die zodanig is, dat het matrixproduct $\mathbf{F} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{N}$ een reële betekenis heeft voor de leiding van het bungalowpark. Wat is deze betekenis?

(c) De leiding van het park wil nu een bewerking(en) uitvoeren met de gegeven matrices zodat het resultaat de inkomsten op jaarbasis geeft. Welke bewerking(en) is (zijn) dit?

13



Dit is een schema met een aantal punten A, B, C, D, E en F. Matrix $\mathbf{D}$ is de bijbehorende verbindingsmatrix van dit schema.

$$\mathbf{D} = \begin{array}{cc} & \text{Van} \\ & \begin{array}{cccccc} A & B & C & D & E & F \end{array} \\ \text{Naar} \; \begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

(a) Wat is de betekenis van de matrix $\mathbf{D}$?

(b) Bereken het matrixproduct $\mathbf{D}^2 = \mathbf{D} \cdot \mathbf{D}$.

(c) Wat is de betekenis van de matrix $\mathbf{D}^2$?

(d) Op dezelfde manier kunnen we matrix $\mathbf{D}^3 = \mathbf{D} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{D}$ berekenen:

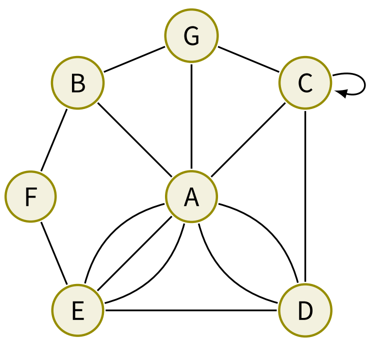
$$\mathbf{D}^3 = \begin{array}{cc} & \text{Van} \\ & \begin{array}{cccccc} A & B & C & D & E & F \end{array} \\ \text{Naar} \; \begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \end{array} & \begin{bmatrix} 3 & 5 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & 5 & 6 & 6 & 7 & 1 \\ 2 & 6 & 2 & 5 & 2 & 2 \\ 3 & 6 & 5 & 4 & 6 & 1 \\ 2 & 7 & 2 & 6 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Wat is de betekenis van $\mathbf{D}^3$?

(e) Teken het bijbehorende verbindingsschema van de directe-wegenmatrix $\mathbf{D}$:

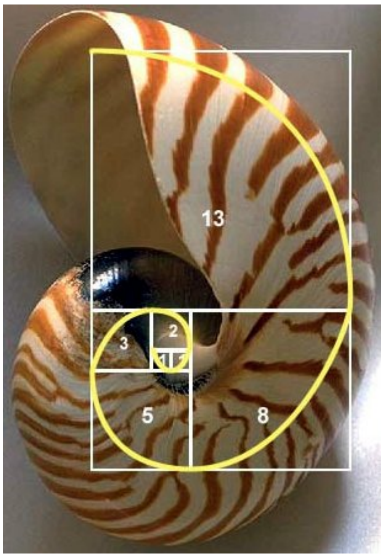
$$\mathbf{D} = \begin{array}{cc} & \text{Van} \\ & \begin{array}{ccccccc} A & B & C & D & E & F & G \end{array} \\ \text{Naar} \; \begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \\ G \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

(f)



Stel de directe-wegenmatrix $\mathbf{D}$ op die hoort bij dit verbindingsschema.

14



Bekijk de volgende rij van getallen.

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, enzovoort.

(a) Kun je de drie volgende elementen van deze rij vinden?

(b) Met deze getallen kun je een spiraal maken. Zie figuur. Wat hebben deze getallen te maken met het matrixproduct? Vermenigvuldig de volgende matrix **F** enkele keren met zichzelf en kijk wat er gebeurt.

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

15

Toevallig ontdekt een expeditie een zeldzame insectensoort. Een bioloog wordt naar de streek gestuurd om een grondig onderzoek in te stellen.

Hij verdeelt de insecten in vier leeftijdscategorieën met gelijke tijdsintervallen van een jaar.

Zijn onderzoek wijst uit dat de insecten vanaf de tweede periode nakomelingen hebben. Elk insect uit deze leeftijdscategorie produceert gemiddeld vier nakomelingen. Dit stijgt in de derde groep tot zes om in de laatste groep te dalen tot twee.

Verder stelt hij vast dat veertig procent van de insecten de eerste periode niet overleeft. In de tweede fase zijn ze sterker en tachtig procent bereikt de volgende leeftijdscategorie. Maar slechts de helft hiervan bereikt de laatste leeftijdscategorie.

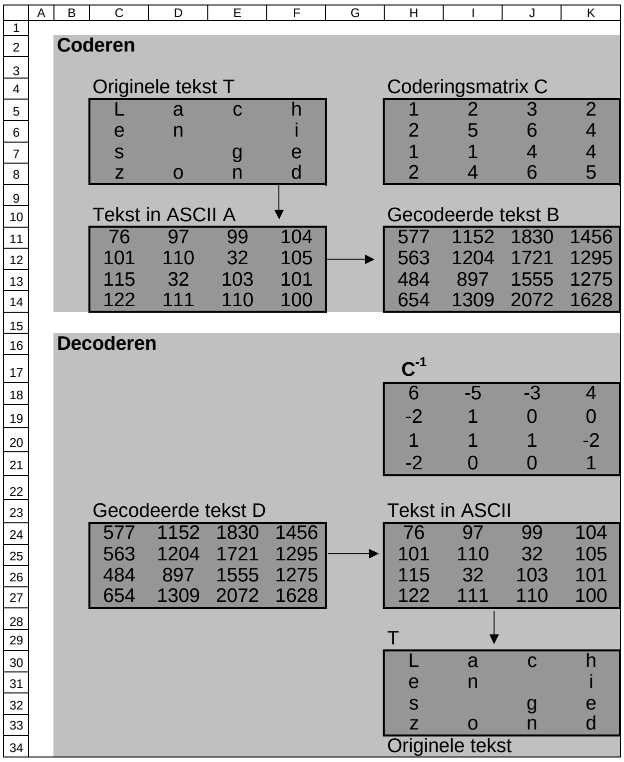
De bioloog besluit zijn bevindingen te publiceren.

(a) Geef de Lesliematrix **L** waarin hij de resultaten van zijn onderzoek samenvat.

(b) Teken het bijbehorende transitieschema.

(c) Stel dat je in het begin van elke categorie 100 dieren hebt. Hoe evolueren de aantallen van deze insectensoort dan in de loop der jaren (neem drie achtereenvolgende jaren)?

16 Je ziet in figuur 1 een rekenblad. Met dit rekenblad kun je informatie coderen en decoderen.



Figuur 1 – Coderen en decoderen

(a) Maak dit rekenblad zelf met behulp van een computer.

Volg de volgende richtlijnen:

- Begin vanaf een leeg werkblad.
- Sla het rekenblad op in een map.
- Jij bent de *ontwerper* van het werkblad. Dus jij verzorgt de opmaak en geeft formules in. Met *de gebruiker* bedoelen we iemand die dit werkblad gaat gebruiken. Deze vult bijvoorbeeld de originele tekst in voor matrix **T**, vult een coderingsmatrix **C** in en geeft een gecodeerde tekst **D** in. Om het werkblad gebruiksvriendelijk te maken, geef je deze cellen een lichtblauwe kleur.
  lichtblauw → tekst of getallen intypen
- In sommige cellen moeten formules komen. Kleur deze cellen groen.
  groen → formules
- In dit werkblad zie je dat de letters van het alfabet *niet* gecodeerd worden met de cijfers 1, 2, 3, . . . 26.
  We hebben hier de ASCII-code gebruikt. Dit is een universele code die door computers gebruikt wordt om tekst te coderen. Zo wordt de kleine letter *a* gecodeerd met de ASCII-code 97 en de hoofdletter *A* met de ASCII-code 65. De ASCII-code voor een *spatie* is 32 en het cijfer '0' heeft als ASCII-code 48. Zie figuur 2 op pagina 25 voor de overige tekens.
  Rekenbladprogramma's hebben functies om die codes te berekenen. In Excel en OpenOffice.org Calc worden hiervoor de functies `code()` en `teken()` gebruikt.
  Voorbeeld: in cel `C11` moet de formule `=code(C5)` komen. In cel `H30` staat dan weer de formule `=teken(h24)`.

- Je moet ook matrixformules gebruiken: `productmat()` en `inversemat()`.
  Let bij het gebruik van matrixformules op dat je *eerst* het bereik selecteert waar de uitkomstmatrix moet komen, dan de juiste formule gebruikt met de knop f_x (= *Functie plakken*) en tenslotte *niet* op OK klikken maar wel:
  Ctrl Shift Enter drukken.
- Bij het intypen van de originele tekst (matrix **T**), moet je ervoor zorgen dat in *elke* cel een teken getypt wordt. Je mag geen cellen leeg laten. Typ dus ook de spaties in met de spatiebalk. Zie bijvoorbeeld figuur 1 cel `E6` en cel `D7`.

(b) Als het werkblad afgewerkt is, kun je de volgende boodschap **D** ontcijferen met de coderingsmatrix **C**:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 4847 & 2393 & 11257 & 9082 \\ 2837 & 2555 & 14291 & 11427 \\ 5305 & 3267 & 15843 & 11958 \\ 5330 & 3109 & 15553 & 12720 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 12 & 17 & 103 & 88 \\ 0 & 1 & 17 & 20 \\ 33 & 8 & 14 & 6 \\ 7 & 6 & 22 & 5 \end{bmatrix}$$

(c) De boodschap *Frank is winnaar* wordt met de coderingsmatrix **C** gecodeerd tot de matrix **B**. Matrix **B** bevat echter een foutje. Tip: het getal 99 999 is fout. Welk getal moet het zijn?

Vind deze fout door middel van het afgewerkte werkblad.

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 10 & -15 & -20 & 25 \\ 100 & -110 & 120 & 130 \\ 99 & 98 & 97 & 88 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 21800 & -1460 & 20240 & 25420 \\ 22312 & -546 & 23436 & 99999 \\ 22612 & -2491 & 20986 & 26433 \\ 22066 & -733 & 21088 & 25507 \end{bmatrix}$$

Downloaden

Als je er niet in slaagt om het rekenblad zelf te maken vanaf nul, geen probleem, want je kunt het downloaden op mijn website.

Je vindt het uitgewerkte kant-en-klaar rekenblad op de volgende website.

https://denkendehanden.be/download.html
Coderen en decoderen met matrices

Cijfer	ASCII
0	48
1	49
2	50
3	51
4	52
5	53
6	54
7	55
8	56
9	57

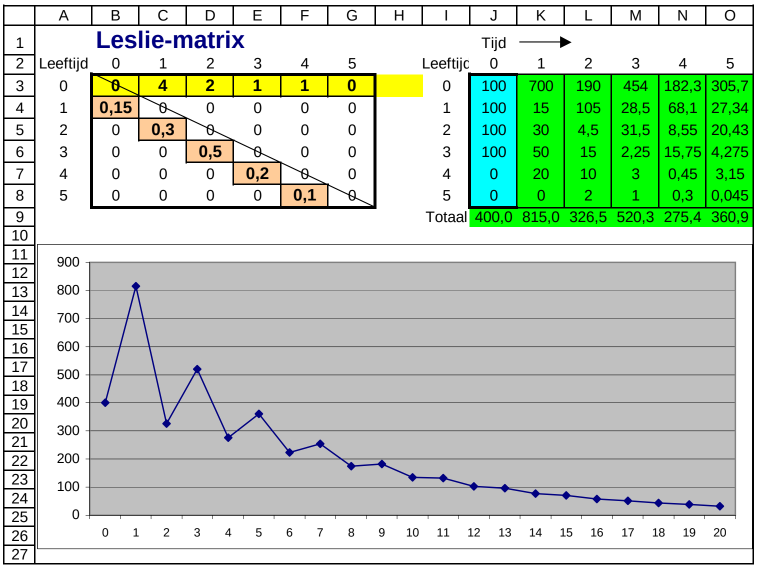
Leesteken	ASCII
	32
!	33
"	34
%	37
&	38
'	39
(	40
)	41
*	42
+	43
,	44
-	45
.	46
/	47

LETTER	ASCII
A	65
B	66
C	67
D	68
E	69
F	70
G	71
H	72
I	73
J	74
K	75
L	76
M	77
N	78
O	79
P	80
Q	81
R	82
S	83
T	84
U	85
V	86
W	87
X	88
Y	89
Z	90

letter	ASCII
a	97
b	98
c	99
d	100
e	101
f	102
g	103
h	104
i	105
j	106
k	107
l	108
m	109
n	110
o	111
p	112
q	113
r	114
s	115
t	116
u	117
v	118
w	119
x	120
y	121
z	122

Figuur 2 – American Standard Code for Information Interchange

17 (a) Je ziet in figuur 3 een rekenblad. Met dit rekenblad kun je de evolutie van een diersoort berekenen met behulp van een Lesliematrix.



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
1		Leslie-matrix								Tijd →					
2	Leeftijd	0	1	2	3	4	5		Leeftijd	0	1	2	3	4	5
3	0	0	4	2	1	1	0		0	100	700	190	454	182,3	305,7
4	1	0,15	0	0	0	0	0		1	100	15	105	28,5	68,1	27,34
5	2	0	0,3	0	0	0	0		2	100	30	4,5	31,5	8,55	20,43
6	3	0	0	0,5	0	0	0		3	100	50	15	2,25	15,75	4,275
7	4	0	0	0	0,2	0	0		4	0	20	10	3	0,45	3,15
8	5	0	0	0	0	0,1	0		5	0	0	2	1	0,3	0,045
9									Totaal	400,0	815,0	326,5	520,3	275,4	360,9

Figuur 3 – Evolutie van een dierpopulatie

Maak dit werkblad in een rekenbladprogramma. Volg de volgende richtlijnen:

- Begin vanaf een leeg werkblad.
- Sla het rekenblad op in een map.
- Weet je nog:
  lichtblauw → tekst of getallen intypen
  Kleur de cellen `J3:J8` blauw. Kleur de eerste rij (vruchtbaarheidscijfers) van de Lesliematrix geel. Kleur de overlevingskansen in de Lesliematrix roos.
- In sommige cellen moeten formules komen. Kleur deze cellen groen.
  groen → formules
- Je moet ook matrixformules gebruiken: `productmat()`.
  Let bij het gebruik van matrixformules op dat je *eerst* het bereik selecteert waar de uitkomstmatrix moet komen, dan de juiste formule gebruikt met de knop f_x (= *Functie plakken*) en tenslotte *niet* op OK klikken maar wel:
  Ctrl Shift Enter drukken.
- Ook in de cel `K2` staat een formule (`=J2+1`) die je achteraf naar rechts kunt kopiëren.
- Om de bijbehorende grafiek te maken moet je het werkblad uitbreiden zodat de evolutie kan bekeken worden van 0 tot 20 jaar. Uiteraard kun je dit doen door de formules in de cellen `K2:K9` naar rechts te kopiëren.
- Maak ook de bijbehorende lijngrafiek voor de periode 0 tot 20 jaar.

(b) Hoeveel dieren zijn er in elke leeftijdscategorie na 20 jaar?

(c) Zoals je ziet, sterft deze dierpopulatie uit. Experimenteer een beetje met de vruchtbaarheidscijfers en de overlevingskansen om de diersoort op peil te houden. Probeer een stabiele situatie te verkrijgen.

18

In deze tabel staan de tellingen van een populatie zoogdieren die vier generaties kent. Alleen dieren van 1 of 2 jaar krijgen jongen.

Leeftijd	2000	2002	2004
0	1150	1160	1880
1	800	920	928
2	120	320	368
3	30	12	32

(a) Bepaal de Lesliematrix van deze diersoort.

(b) Bereken het gemiddeld aantal nakomelingen per dier.

(c) Sterft de populatie uit, of wordt het een plaag?

19

Tweejarige planten bloeien pas in hun tweede levensjaar: na het dragen van vruchten sterven de oude planten af. Per oude plant ontstaan er gemiddeld 8 jonge planten. Uit onderzoek blijkt dat 50 % van de jonge planten eenjarige planten worden en dat 25 % van de eenjarige planten het tweede levensjaar bereiken.

(a) Geef dit weer in een graaf.

(b) Stel de Lesliematrix voor deze tweejarige planten op.

(c) Hoeveel kans heeft een jonge plant om zelf weer jonge planten voort te brengen?

(d) Als er in een bepaald afgesloten gebied 400 jonge planten, 400 eenjarige planten en 100 oude planten worden waargenomen, hoe zal die populatie zich dan in de komende jaren ontwikkelen?

(e) Geef de resultaten weer in een grafiek.

20 Een kudde antilopen bestaat uit dieren van vier generaties. De generatieduur is ongeveer 5 jaar. Hun weidegebied is dichtbevolkt met roofdieren. Een bioloog heeft op basis van observaties een graaf opgesteld die de geboortecijfers en de overlevingskansen van de kudde antilopen weergeeft. Stel je voor dat elke generatie in de kudde op zeker moment uit 100 dieren bestaat.

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r, bend left, "0.40"] & 1 \arrow[r, bend left, "0.30"] \arrow[l, bend left, "0"] & 2 \arrow[r, bend left, "0.20"] \arrow[ll, bend left, "1"] & 3 \arrow[lll, bend left, "2"]
\end{tikzcd}
$$

(a) Geef de Lesliematrix van deze antilopen.

(b) Bereken de populatie-aantallen voor vier opeenvolgende perioden (van 5 jaar).

(c) Laat zien dat er geen sprake is van een natuurlijk evenwicht.

(d) Na hoeveel jaar is de kudde in dit model uitgestorven?

(e) Bereken het gemiddeld aantal nakomelingen per dier.

(f) Na 15 jaar wordt er besloten om het aantal roofdieren in het leefgebied van de kudde antilopen zodanig te verminderen dat hun overlevingskansen verdubbelen. Onderzoek of het verdubbelen van de overlevingskansen het uitsterven van de kudde antilopen zal voorkomen.

(g) Na verdere observatie blijken ook de geboortecijfers van de kudde te worden beïnvloed door de afname van het aantal roofdieren. Geef daarvoor een verklaring.

(h) Stel dat de geboortecijfers zodanig veranderen dat alle dieren ouder dan 5 jaar gemiddeld voor 2 nakomelingen kunnen zorgen. Onderzoek nu hoe het verloop van de aantallen dieren per generatie de komende jaren zal zijn. Maak een passende grafiek voor het totaal aantal dieren in de loop der jaren. Is er sprake van exponentiële groei van de populatie? Zo ja, bepaal dan de groeifactor.

(i) Bereken het gemiddeld aantal nakomelingen per dier.

21 Een supermarkt verkoopt twee merken waspoeder, Bright en Shine. Er wordt een derde merk geïntroduceerd, met de naam White. Dit nieuwe merk zou op den duur één van beide andere merken moeten vervangen. De bedrijfsleiding is dan ook erg geïnteresseerd in het koopgedrag van de consument. Er wordt aan 120 klanten die al hun waspoeder kopen bij deze supermarkt gevraagd naar hun koopgedrag. Daarbij blijkt dat ze gemiddeld een maand doen met een groot pak waspoeder van een bepaald merk en dan aan het einde van die maand een nieuw pak aanschaffen. De volgende tabel geeft de wisseling van merken weer.

		Deze maand			
		W	S	B	Totaal
Volgende maand	W	15	10	15	40
	S	3	25	15	43
	B	2	15	20	37
Totaal		20	50	50	120

(a) Hoeveel van deze klanten hebben in beide maanden waspoeder van het merk Shine gekocht?

(b) Hoeveel procent van de klanten is van merk gewisseld?

(c) Stel voor de overgangen van het ene merk naar het andere een graaf en een overgangsmatrix **A** op.

(d) Welke overgangsperiode kent de graaf?

(e) De bedrijfsleiding gaat ervan uit dat deze overgangen voor de komende maanden blijven gelden.

Stel je nu voor dat aanvankelijk de verdeling voor de merken Bright en Shine als volgt was: 35 % van de klanten koopt Bright en 65 % van de klanten koopt Shine. Bereken dan de verdeling van de klanten over de drie verschillende merken na de introductie van het merk White.

(f) Bereken ook de verdeling van de klanten over de drie verschillende merken een maand later.

(g) Onderzoek of er een evenwichtssituatie ontstaat en bereken de verdeling van de klanten over de drie merken waspoeder in de evenwichtssituatie.

(h) Kan het nieuwe waspoeder inderdaad één van beide andere merken vervangen?

22 Bereken de inverse matrix.

a) $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$

b) $A=\begin{pmatrix}-3 & -2\\ 3 & 3\end{pmatrix}$

c) $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$

d) $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

e) $A=\begin{pmatrix}5 & 1 & -2\\ -2 & 0 & 5\\ 7 & 2 & 8\end{pmatrix}$

f) $A=\begin{pmatrix}5 & -5 & 5 & 6\\ 2 & 1 & 1 & 2\\ -1 & -1 & 0 & 1\\ 5 & 1 & 2 & 1\end{pmatrix}$

g) $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 5\end{pmatrix}$

h) $A=\begin{pmatrix}5 & 9\\ 3 & 4\end{pmatrix}$

i) $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 6 & 5 & 4\\ 13 & 10 & 8\end{pmatrix}$

j) $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 1\\ 3 & 2 & 5\\ 2 & 2 & 2\end{pmatrix}$

k) $A=\begin{pmatrix}0 & 5 & 5\\ 1 & 6 & 5\\ -2 & 8 & 9\end{pmatrix}$

l) $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & -1 & 1\end{pmatrix}$

m) $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -4 & -3\end{pmatrix}$

n) $A=\begin{pmatrix}-1 & -2\\ -3 & -4\end{pmatrix}$

o) $A=\begin{pmatrix}2 & 5 & 7\\ 6 & 3 & 4\\ 5 & -2 & -3\end{pmatrix}$

p) $A=\begin{pmatrix}3 & 1 & 10\\ 2 & 5 & 4\\ -1 & -3 & 1\end{pmatrix}$

r) $A=\begin{pmatrix}10 & 20 & 30\\ 7 & 18 & 20\\ -2 & -7 & -5\end{pmatrix}$

s) $A=\begin{pmatrix}3 & 2 & 1 & 2\\ 7 & 5 & 2 & 5\\ 0 & 0 & 9 & 4\\ 0 & 0 & 11 & 5\end{pmatrix}$

Oplossingen van de opdrachten

1

(a) **A** is een eenheidsmatrix en dus ook een diagonaalmatrix (alle elementen buiten de hoofddiagonaal zijn 0), een vierkante matrix en een symmetrische matrix.

(b) **B** is een diagonaalmatrix en **B** is dus ook symmetrisch en vierkant.

(c) **C** is een vierkante matrix, maar geen symmetrische matrix!

(d) **D** is een rijmatrix.

(e) **E** is een 4×2 matrix.

(f) **F** is een symmetrische matrix en dus ook een vierkante matrix.

(g) **G** is een vierkante matrix.

(h) **H** is een nulmatrix (alle elementen zijn 0).

2

(a) $a_{23} = 10$

(b) $a_{14} = 0$

(c) $a_{22} = 4$

(d) $a_{24} = -7$

3

(a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$

(b) $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$

4

(a) $c_{ij} = i \cdot 10 + j - 1$

(b) $d_{ij} = i^j$

(c) $e_{ij} = i - j$

(d) $f_{ij} = i \cdot j$

5

(a) $\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

(b) $\mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{16} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1875 & 0.125 \\ 0.125 & -0.25 \end{bmatrix}$

(c) $\mathbf{C}^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 3.5 & -2.5 \\ 0 & 0.5 & -0.5 \\ 3 & -5 & 4 \end{bmatrix}$

(d) $\mathbf{D}^{-1} = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.2 & 0.25 \\ 0 & 0 & -0.5 \\ 0.5 & 0 & 0.25 \end{bmatrix}$

(e) $\mathbf{E}^{-1} = \begin{bmatrix} ? & ? \\ ? & ? \end{bmatrix}$ Matrix **E** is niet inverteerbaar.

(f) $\mathbf{F}^{-1} = \begin{bmatrix} -0.5 & 0.25 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

(g) $\mathbf{H}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

(h) $\mathbf{J}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(i) $\mathbf{K}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

6

$$\mathbf{D} = \begin{array}{c} \\ \\ \text{Naar} \end{array} \begin{array}{r} \\ \text{Brussel} \\ \text{Londen} \\ \text{Metz} \\ \text{Parijs} \end{array} \begin{array}{c} \text{Van} \\ \begin{array}{cccc} \text{Brussel} & \text{Londen} & \text{Metz} & \text{Parijs} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 310 & 180 & 260 \\ 310 & 0 & 475 & 340 \\ 180 & 475 & 0 & 275 \\ 260 & 340 & 275 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$\boxed{7}$ (a) $\mathbf{A} = B \cdot \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 41 & 69 \\ 104 & 180 \end{bmatrix}$.

(b) Je moet de geheime boodschap **A** terug vermenigvuldigen met de inverse van de coderingsmatrix **C**.

(c) $\mathbf{C}^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -\frac{5}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$.

(d) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}^{-1} = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 12 & 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h & e \\ l & p \end{bmatrix} = \mathbf{B}$

(e) Een land in Azië.

$\boxed{8}$ Een dier.

$\mathbf{C}^{-1} = \begin{bmatrix} 1.5 & -1 \\ -2.5 & 2 \end{bmatrix}$

$\boxed{9}$ Zie *Uitwerkingen van de opdrachten*.

$\boxed{10}$ Zie *Uitwerkingen van de opdrachten*.

$\boxed{11}$ Zie *Uitwerkingen van de opdrachten*.

$\boxed{12}$ Zie *Uitwerkingen van de opdrachten*.

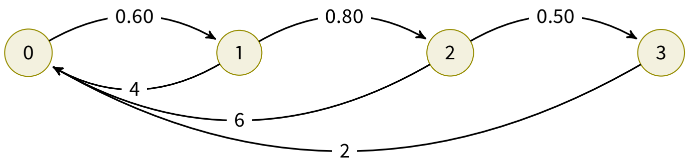
$\boxed{13}$ Zie *Uitwerkingen van de opdrachten*.

$\boxed{14}$ $\boxed{89, 144, 233}$

Zie ook *Uitwerkingen van de opdrachten* voor meer details.

15 (a) $\mathbf{L} = \begin{array}{cc} & \text{Van} \\ & \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \text{Naar} \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 4 & 6 & 2 \\ 0.60 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.80 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.50 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$

(b)

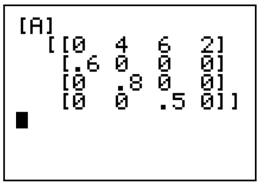


(c)

Leeftijdscategorie	Jaar:	0 jaar	1 jaar	2 jaar	3 jaar
0		100	1200	820	3248
1		100	60	720	492
2		100	80	48	576
3		100	50	40	24

Je kunt de aantallen insecten laten berekenen met behulp van de *grafische rekenmachine*. Dat gaat als zo.

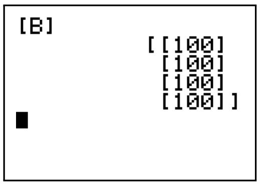
grm



Geef de matrix **A** in.

Matrix / Edit / **A** / 4 × 4

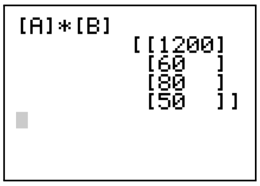
Dit is de Lesliematrix.



Geef vervolgens de matrix **B** in.

Matrix / Edit / **B** / 4 × 1

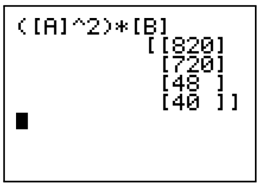
Dit is de begin-*bevolkingsmatrix*.



Bereken het matrixproduct $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$.

Matrix **A** × Matrix **B**

Dit is de *bevolkingsmatrix na 1 jaar*.



Bereken het matrixproduct $\mathbf{A}^2 \cdot \mathbf{B}$.

Matrix **A** ˆ 2 × Matrix **B**

Dit is de *bevolkingsmatrix na 2 jaar*.

De berekening $\mathbf{A}^3 \cdot \mathbf{B}$ geeft dan de bevolking na 3 jaar, enzovoort.

16 (a)

> **Downloaden**
> Als je er niet in slaagt om het rekenblad zelf te maken vanaf nul, geen probleem, want je kunt het downloaden op mijn website.
>
> `https://denkendehanden.be/download.html`
> *Coderen en decoderen met matrices*

(b) Een Vlaamse schrijfster

(c) b_{24} moet 24998 zijn in plaats van 99999.

17 (a)

> **Downloaden**
> Als je er niet in slaagt om het rekenblad zelf te maken vanaf nul, geen probleem, want je kunt het downloaden op mijn website.
>
> Je vindt het uitgewerkte kant-en-klaar rekenblad op de volgende website.
>
> `https://denkendehanden.be/download.html`
>
> *Lesliematrix*

(b)

Leeftijdscategorie	Jaar:	…	20 jaar
0			25
1			4.509
2			1.505
3			0.919
4			0.201
5			0.025
Totaal			32.2

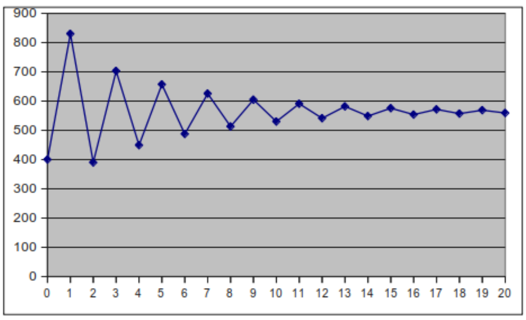
(c) Maak de overlevingskansen een beetje hoger bijvoorbeeld.

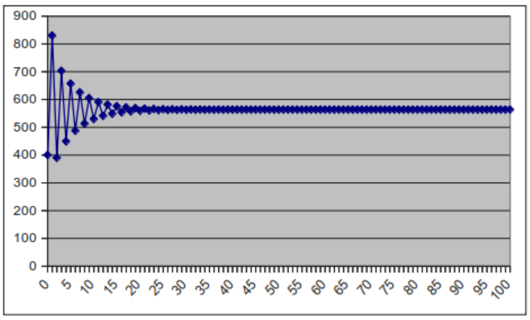
Leslie-matrix

Leeftijd	0	1	2	3	4	5
0	0	4	2	1	0	0
1	0.2	0	0	0	0	0
2	0	0.4	0	0	0	0
3	0	0	0.5	0	0	0
4	0	0	0	0.2	0	0
5	0	0	0	0	0.1	0

Tijd →

Leeftijd	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	100	700	210	596	284	538.4	331	500	362.3	474.5	383
1	100	20	140	42	119.2	56.8	107.7	66.19	100	72.45	94.
2	100	40	8	56	16.8	47.68	22.72	43.07	26.48	40	28.
3	100	50	20	4	28	8.4	23.84	11.36	21.54	13.24	20
4	0	20	10	4	0.8	5.6	1.68	4.77	2.27	4.31	2.6
5	0	0	2	1	0.4	0.08	0.56	0.17	0.48	0.23	0.4
Totaal	400.0	830.0	390.0	703.0	449.2	657.0	487.4	625.6	513.0	604.7	530





18 (a) De Lesliematrix is

$$\mathbf{L} = \text{Naar}\ \begin{array}{c|cccc} & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 0 & & & & \\ 1 & & & & \\ 2 & & & & \\ 3 & & & & \end{array}$$

$$\mathbf{L} = \begin{array}{cc} & \text{Van} \\ & \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \text{Naar}\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0.80 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.40 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.10 & 0 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Zie *Uitwerkingen van de opdrachten* om te controleren hoe je aan de vruchtbaarheidscijfers en aan de overlevingskansen komt.

(b) $\boxed{1.76}$

(c) $\boxed{\text{Plaag}}$

19 Zie *Uitwerkingen van de opdrachten*.

20 Zie *Uitwerkingen van de opdrachten*.

21 (a) $\boxed{\text{25 klanten}}$

(b) $\boxed{50\,\%}$

Zie ook *Uitwerkingen van de opdrachten*.

(c)

$$\mathbf{W} = \begin{array}{cc} & \text{Van} \\ & \begin{array}{ccc} W & S & B \end{array} \\ \text{Naar}\ \begin{array}{c} W \\ S \\ B \end{array} & \begin{bmatrix} 0.75 & 0.20 & 0.30 \\ 0.15 & 0.50 & 0.30 \\ 0.10 & 0.30 & 0.40 \end{bmatrix} \end{array}$$

(d) $\boxed{\text{1 maand}}$

(e) Zie ook *Uitwerkingen van de opdrachten*.

(f) Zie ook *Uitwerkingen van de opdrachten*.

22

a) $A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$

b) $A^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-3 & -2\\ 3 & 3\end{pmatrix}$

c) $A^{-1}=\begin{pmatrix}0 & -1 & 1\\ -1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}$

d) $A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -2 & 7\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

e) $A^{-1}=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}-10 & -12 & 5\\ 51 & 54 & -21\\ -4 & -3 & 2\end{pmatrix}$

f) $A^{-1}=\frac{1}{8}\begin{pmatrix}-4 & -8 & 26 & 14\\ 2 & 8 & -19 & -9\\ 10 & 16 & -63 & -29\\ -2 & 0 & 15 & 5\end{pmatrix}$

g) $A^{-1}=\begin{pmatrix}-5 & 2\\ 3 & -1\end{pmatrix}$

h) $A^{-1}=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}-4 & 9\\ 3 & -5\end{pmatrix}$

i) $A^{-1}=\begin{pmatrix}0 & -2 & 1\\ -4 & 5 & -2\\ 5 & -3 & 1\end{pmatrix}$

j) $A^{-1}=\frac{1}{8}\begin{pmatrix}-6 & -4 & 13\\ 4 & 0 & -2\\ 2 & 4 & -7\end{pmatrix}$

k) $A^{-1}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}14 & -5 & -5\\ -19 & 10 & 5\\ 20 & -10 & -5\end{pmatrix}$

l) $A^{-1}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & -1 & 1\end{pmatrix}$

m) $A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}3 & 1\\ -4 & -2\end{pmatrix}$

n) $A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}4 & -2\\ -3 & 1\end{pmatrix}$

o) $A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ -38 & 41 & -34\\ 27 & -29 & 24\end{pmatrix}$

p) $A^{-1}=\frac{1}{35}\begin{pmatrix}17 & -31 & -46\\ -6 & 13 & 8\\ -1 & 8 & 13\end{pmatrix}$

r) $A^{-1}=\frac{1}{10}\begin{pmatrix}50 & -110 & -140\\ -5 & 10 & 10\\ -13 & 30 & 40\end{pmatrix}$

s) $A^{-1}=\begin{pmatrix}5 & -2 & -5 & 4\\ -7 & 3 & 16 & -13\\ 0 & 0 & 5 & -4\\ 0 & 0 & -11 & 9\end{pmatrix}$

Uitwerkingen van de opdrachten

9 (a)

$$\begin{array}{c|cc} \mathbf{A} & \text{Kro} & \text{Gele} \\ \hline \text{zout} & 4 & 3 \\ \text{pap} & 3 & 2 \\ \text{bol} & 2 & 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|ccc} \mathbf{P} & \text{zout} & \text{pap} & \text{bol} \\ \hline \text{Kro} & 30 & 32 & 35 \\ \text{Gele} & 17 & 20 & 23 \end{array} \qquad \begin{array}{c|cc} \mathbf{P}\cdot\mathbf{A} & \text{Kro} & \text{Gele} \\ \hline \text{Kro} & 286 & \cancel{224} \\ \text{Gele} & \cancel{174} & 137 \end{array}$$

De elementen op de hoofddiagonaal van de productmatrix $\mathbf{P}\cdot\mathbf{A}$ zijn $\boxed{(286, 137)}$. Dit zijn de totaalprijzen voor de Kro-chips en de Gele chips.

(b)

$$\begin{array}{c|ccc} \mathbf{P} & \text{zout} & \text{pap} & \text{bol} \\ \hline \text{Kro} & 30 & 32 & 35 \\ \text{Gele} & 17 & 20 & 23 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|cc} \mathbf{A} & \text{Kro} & \text{Gele} \\ \hline \text{zout} & 4 & 3 \\ \text{pap} & 3 & 2 \\ \text{bol} & 2 & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{c|ccc} \mathbf{A}\cdot\mathbf{P} & \text{zout} & \text{pap} & \text{bol} \\ \hline \text{zout} & 171 & \cancel{188} & \cancel{209} \\ \text{pap} & \cancel{124} & 136 & \cancel{151} \\ \text{bol} & \cancel{94} & \cancel{104} & 116 \end{array}$$

De elementen op de hoofddiagonaal van de productmatrix $\mathbf{A}\cdot\mathbf{P}$ zijn $\boxed{(171, 136, 116)}$. Dit zijn de totaalprijzen voor de zoute, paprika- en bolognèse-chips.

(c) De andere elementen van de product productmatrix $\mathbf{P}\cdot\mathbf{A}$ hebben *geen* betekenis, omdat de prijzen van de ene soort chips verkeerd gekoppeld zijn aan gegevens van aantallen van de *andere soort* chips.

(d) De som van de hoofddiagonalen van productmatrix $\mathbf{P}\cdot\mathbf{A}$ en van productmatrix $\mathbf{A}\cdot\mathbf{P}$ moeten gelijk zijn aan elkaar, want deze som stelt de $\boxed{\text{totale prijs 423}}$ voor van de hele bestelling.

10

$$\mathbf{A} = \begin{array}{c} 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{array} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{array}{c} 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{array} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{array}{c} 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{array} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{D} = \begin{array}{c} 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{array} \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{bmatrix} \quad \mathbf{E} = \begin{array}{cc} \text{5IW} & \text{5HW} \\ \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$$

11

$$\begin{array}{c|cc} \mathbf{P} & \text{Inkoop} & \text{Verkoop} \\ \hline \text{M} & 400 & 500 \\ \text{S} & 275 & 400 \\ \text{K} & 600 & 800 \\ \text{L} & 900 & 1200 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|cccc} \mathbf{V} & \text{M} & \text{S} & \text{K} & \text{L} \\ \hline \text{fil1} & 10 & 12 & 8 & 4 \\ \text{fil2} & 7 & 8 & 5 & 2 \\ \text{fil3} & 8 & 8 & 6 & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{c|cc} \mathbf{T} & \text{Inkoop} & \text{Verkoop} \\ \hline \text{fil1} & 15\,700 & 21\,000 \\ \text{fil2} & 9\,800 & 13\,100 \\ \text{fil3} & 10\,800 & 14\,400 \end{array} \qquad \begin{array}{c|c} \mathbf{D} & \\ \hline \text{Inkoop} & -1 \\ \text{Verkoop} & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|ccc} \mathbf{Q} & \text{fil1} & \text{fil2} & \text{fil3} \\ \hline & 1 & 1 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{cc} \text{Inkoop} & \text{Verkoop} \\ \hline 36\,300 & 48\,500 \end{array} \qquad \begin{array}{c} \mathbf{W} \\ \hline 12\,200 \end{array}$$

Het element $t_{12} = 21\,000$ is de totale verkoopprijs van de verkochte wasmachines in filiaal 1.

12

$$\begin{array}{c|c} \mathbf{N} & \text{Aantallen} \\ \hline \text{A} & 40 \\ \text{B} & 30 \\ \text{C} & 20 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|ccc} \mathbf{P} & \text{A} & \text{B} & \text{C} \\ \hline \text{LS} & 324 & 221 & 261 \\ \text{MS} & 378 & 266 & 320 \\ \text{HS} & 486 & 351 & 428 \end{array} \qquad \begin{array}{c|c} \mathbf{T{=}P{\cdot}N} & \text{Totaal per seizoen} \\ \hline \text{LS} & 24\,810 \\ \text{MS} & 29\,500 \\ \text{HS} & 38\,530 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|ccc} \mathbf{F} & \text{LS} & \text{MS} & \text{HS} \\ \hline & 0.50 & 0.80 & 0.90 \end{array} \qquad \begin{array}{c|c} \mathbf{F{\cdot}P{\cdot}N} & \text{Totaal} \\ \hline & 70\,682 \end{array}$$

13 (a) '1' betekent dat de overeenkomstige punten verbonden zijn door een lijn. '0' betekent dat er geen verbinding is. Bijvoorbeeld: B en D zijn direct verbonden. D en F zijn niet rechtstreeks verbonden.

(b)

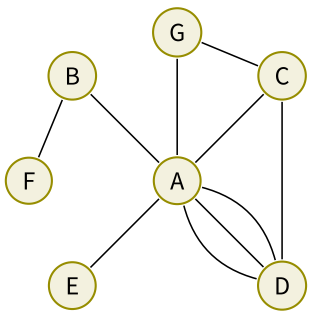
$$\mathbf{D}^2 = \begin{array}{cc} & \text{Van} \\ & \begin{array}{cccccc} A & B & C & D & E & F \end{array} \\ \text{Naar} \begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \end{array} & \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

(c) In matrix $\mathbf{D}^2$ staat beschreven hoe goed de punten onderling verbonden zijn in *twee* stappen. Bijvoorbeeld:

- Je kunt op 2 manieren van C naar E te gaan in twee stappen: via B en via D.
- Je kunt op 0 manieren van E naar F te gaan in twee stappen.
- Je kunt op 2 manieren van B naar D te gaan in twee stappen (via C en via E).
- Je kunt op 4 manieren van B naar B te gaan in twee stappen (via A heen en weer, via C, via D en via E).

(d) In $\mathbf{D}^3$ staat beschreven hoe goed de punten onderling verbonden zijn in *drie* stappen.

(e)



Tussen A en D zijn er drie directe wegen. Denk bijvoorbeeld als toepassing aan internetverbindingen tussen servers.

(f)

$$\mathbf{D} = \begin{array}{cc} & \text{Van} \\ & \begin{array}{ccccccc} A & B & C & D & E & F & G \end{array} \\ \text{Naar} \begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \\ G \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

14

$$F \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

som

$$F \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & \cancel{1}\,2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 5 & \cancel{1}\,3 \end{bmatrix}$$

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ...

89, 144, 233, ...

$F, F^2, F^3, F^4, \ldots$

grm

```
[F]^4
          [[5 3]
           [3 2]]
[F]^5
          [[8 5]
           [5 3]]
```

```
[F]^11
       [[144 89]
        [89  55]]
[F]^12
      [[233 144]
       [144 89 ]]
```

Vermenigvuldig de matrix **F** enkele keren met zichzelf.

Zo krijg je de rij van matrices $\mathbf{F}$, $\mathbf{F}^2$, $\mathbf{F}^3$, $\mathbf{F}^4$, ...

$$\mathbf{F}^2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{F}^3 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{F}^4 = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{F}^5 = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\vdots \qquad \begin{bmatrix} 144 & 89 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 233 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{F}^{11} = \begin{bmatrix} 144 & 89 \\ 89 & 55 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{F}^{12} = \begin{bmatrix} 233 & 144 \\ 144 & 89 \end{bmatrix}$$

Je vindt de gevraagde rij van *Fibonacci* door telkens het getal *linksboven* van de machten van de matrix **F** af te lezen: (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, ...).

Het vermenigvuldigen van een rijmatrix met de kolommatrix $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ heeft als effect het *optellen* van de elementen in de rijmatrix. Bijvoorbeeld: $144 \cdot 1 + 89 \cdot 1 = 233$.

18 (a) Je vindt de overlevingskansen per generatie als volgt.

$$\frac{920}{1150} = \frac{928}{1160} = \boxed{0.8} \qquad \text{van leeftijd 0 naar leeftijd 1}$$

$$\frac{320}{800} = \frac{368}{920} = \boxed{0.4} \qquad \text{van leeftijd 1 naar leeftijd 2}$$

$$\frac{12}{120} = \frac{32}{320} = \boxed{0.1} \qquad \text{van leeftijd 2 naar leeftijd 3}$$

Alleen leeftijden 1 en 2 zorgen voor jongen. Stel dat het gemiddelde in leeftijd 1 is a jongen per dier, en in leeftijd 2 is dit b jongen per dier. Dan geldt

$$\begin{cases} 800a + 120b = 1160 \\ 920a + 320b = 1880 \end{cases} \xrightarrow{\text{rref}} \begin{cases} a = 1 \\ b = 3 \end{cases}$$

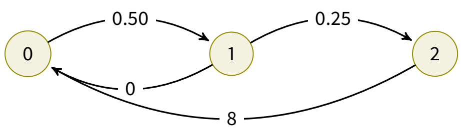
$$\mathbf{L} = \begin{array}{cc} & \text{Van} \\ & \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \text{Naar} \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0.80 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.40 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.10 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Dit is de bijbehorende Lesliematrix.

(b) $\boxed{1.76}$

(c) $\boxed{\text{Plaag}}$

19 (a)



Dit is de bijbehorende overgangsgraaf.

(b)

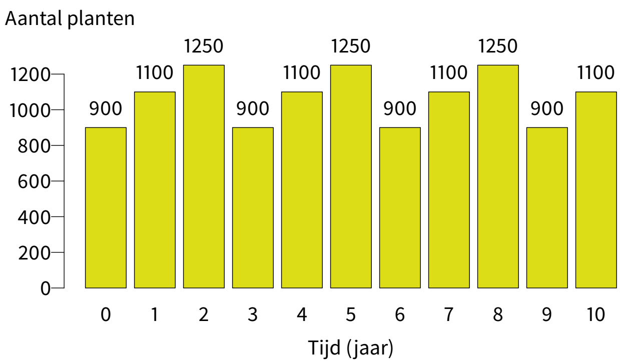
$$\mathbf{L} = \begin{array}{cc} & \text{Van} \\ & \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \end{array} \\ \text{Naar} \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 8 \\ 0.50 & 0 & 0 \\ 0 & 0.25 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Dit is de bijbehorende Lesliematrix.

(c) Een jonge plant moet dan in de oudste groep terecht komen. De kans daarop is

$$0.5 \cdot 0.25 = 0.125 = \boxed{12.5\,\%}.$$

(d)



Er ontstaan periodieke grafieken met een periode van 3 jaar.

20 (a)

$$\mathbf{L} = \begin{array}{ccc} & & \text{Van} \\ & & \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \text{Naar} & \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0.40 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.30 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.20 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

(b)

grm

Gebruik de grafische rekenmachine, en sla de gegevens van de Lesliematrix **L** op in matrix **A**.

Sla de beginaantallen op in matrix **B**.

En bereken dan het matrixproducten
A × **B**
Aˆ2 × **B**
Aˆ3 × **B**, enzovoort

De samenstelling van de kudde na 1 generatie ($g = 1$), na 2 generaties ($g = 2$), na 3 generaties ($g = 3$), ... is als volgt.

$$\begin{array}{cc} & \text{Begin} \\ \begin{array}{c}0\\1\\2\\3\end{array} & \begin{bmatrix}100\\100\\100\\100\end{bmatrix}\end{array} \rightarrow \begin{array}{cc} & g=1 \\ \begin{array}{c}0\\1\\2\\3\end{array} & \begin{bmatrix}300\\40\\30\\20\end{bmatrix}\end{array} \rightarrow \begin{array}{cc} & g=2 \\ \begin{array}{c}0\\1\\2\\3\end{array} & \begin{bmatrix}70\\120\\12\\6\end{bmatrix}\end{array} \rightarrow \begin{array}{cc} & g=3 \\ \begin{array}{c}0\\1\\2\\3\end{array} & \begin{bmatrix}24\\28\\36\\2\end{bmatrix}\end{array} \rightarrow \begin{array}{cc} & g=4 \\ \begin{array}{c}0\\1\\2\\3\end{array} & \begin{bmatrix}40\\10\\8\\7\end{bmatrix}\end{array} \rightarrow \dots \rightarrow \begin{array}{cc} & g=11 \\ \begin{array}{c}0\\1\\2\\3\end{array} & \begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}\end{array}$$

(c) De kudde sterft blijkbaar uit.
Na 11 generaties (van 5 jaar), dus na 55 jaar is er nog maar één kalf over, en zijn er geen oudere antilopen meer.

(d)

```
[A]^11*[B]
     [[.853632 ]
      [.410112 ]
      [.221184 ]
      [.1126656]]
```

De toestand na 11 generaties (van 5 jaar), dus na 55 jaar, is als volgt.

$$\begin{array}{c}0\\1\\2\\3\end{array} \begin{bmatrix}0.8536\\0.4101\\0.2212\\0.1127\end{bmatrix} \overset{\text{afgerond}}{=} \begin{array}{c}0\\1\\2\\3\end{array} \begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}$$

```
[A]^12*[B]
     [[.4465152]
      [.3414528]
      [.1230336]
      [.0442368]]
```

En de toestand na 12 generaties (van 5 jaar), dus na 60 jaar, is als volgt.

$$\begin{array}{c}0\\1\\2\\3\end{array} \begin{bmatrix}0.4465\\0.3415\\0.1230\\0.0442\end{bmatrix} \overset{\text{afgerond}}{=} \begin{array}{c}0\\1\\2\\3\end{array} \begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix}$$

De kudde is uitgestorven na 11 generaties (van 5 jaar), dus na $\boxed{\text{55 jaar}}$.

(e) We berekenen het gemiddelde aantal nakomelingen van een dier.

$$\text{100 dieren} \quad \rightarrow \quad 40 \quad \rightarrow \quad 12 \quad \rightarrow \quad 2.4$$

$$\cdot 0 \qquad \cdot 1 \qquad \cdot 2$$

Aantal nakomelingen: $\boxed{0} + \boxed{12} + \boxed{4.8} = \boxed{16.8}$

Gemiddeld aantal nakomelingen per dier:

$\dfrac{16.8}{100} = \boxed{0.168}$.

Het gemiddeld aantal nakomelingen per dier is kleiner dan 1, dus de kudde sterft zeker uit.

(f)

```
[A]^3*[B]
         [[24  ]
          [28  ]
          [36  ]
          [2.4]]
```

We nemen de samenstelling van de kudde na 15 jaar. dus na 3 generaties, als *beginsituatie*.

$$\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{bmatrix} 24 \\ 28 \\ 36 \\ 2.4 \end{bmatrix} \overset{\text{afgerond}}{=} \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{bmatrix} 24 \\ 28 \\ 36 \\ 2 \end{bmatrix}$$

grm

Sla deze *nieuwe samenstelling van de kudde* op in matrix **D**.

De *nieuwe* Lesliematrix wordt nu

$$\mathbf{L} = \begin{array}{cc} & \text{Van} \\ & \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \text{Naar} \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0.80 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.60 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.40 & 0 \end{bmatrix} \end{array}.$$

grm

Sla deze nieuwe Lesliematrix op in matrix **C**.

```
[C]^1*[D]
       [[40  ]
        [19.2]
        [16.8]
        [14.4]]
```

Je kunt nu de evolutie van de kudde uitrekenen na 1 generatie.

```
[C]^2*[D]
      [[45.6 ]
       [32   ]
       [11.52]
       [6.72 ]]
```

En na bijvoorbeeld 2 generaties, enzovoort.

Je ziet hier de evolutie van de kudde op een rijtje.

$$
\begin{array}{cc} & \text{Begin} \\ \begin{array}{c}0\\1\\2\\3\end{array} & \begin{bmatrix}24\\28\\36\\2\end{bmatrix}\end{array}
\to
\begin{array}{cc} & g=1 \\ \begin{array}{c}0\\1\\2\\3\end{array} & \begin{bmatrix}40\\19\\17\\14\end{bmatrix}\end{array}
\to
\begin{array}{cc} & g=2 \\ \begin{array}{c}0\\1\\2\\3\end{array} & \begin{bmatrix}46\\32\\12\\7\end{bmatrix}\end{array}
\to
\begin{array}{cc} & g=3 \\ \begin{array}{c}0\\1\\2\\3\end{array} & \begin{bmatrix}25\\36\\19\\5\end{bmatrix}\end{array}
\ldots \to
\begin{array}{cc} & g=12 \\ \begin{array}{c}0\\1\\2\\3\end{array} & \begin{bmatrix}25\\18\\11\\5\end{bmatrix}\end{array}
$$

Nu gaat de populatie veel langzamer achteruit.

(g) Doordat er minder roofdieren zijn krijgen de dieren uit de kudde meer rust, waardoor de $\boxed{\text{geboortecijfers waarschijnlijk omhoog gaan}}$. Maar sommige biologen zullen dit misschien tegenspreken, en zeggen dat er juist minder geboortes nodig zijn. We zullen deze bespreking dus veiligheidshalve aan de biologen over laten.

(h) Stel dat de geboortecijfers van de oudere dieren allemaal 2 worden. De nog nieuwere (*derde*) Lesliematrix ziet er nu als volgt uit.

$$
\mathbf{L} = \begin{array}{cc} & \text{Van} \\ & \begin{array}{cccc}0 & 1 & 2 & 3\end{array} \\ \text{Naar}\ \begin{array}{c}0\\1\\2\\3\end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0.80 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.60 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.40 & 0 \end{bmatrix}\end{array}
$$

Nu doorrekenen geeft

$$
\begin{array}{cc} & \text{Begin} \\ \begin{array}{c}0\\1\\2\\3\end{array} & \begin{bmatrix}24\\28\\36\\2\end{bmatrix}\end{array}
\to
\begin{array}{cc} & g=1 \\ \begin{array}{c}0\\1\\2\\3\end{array} & \begin{bmatrix}132\\19\\17\\14\end{bmatrix}\end{array}
\to
\begin{array}{cc} & g=2 \\ \begin{array}{c}0\\1\\2\\3\end{array} & \begin{bmatrix}101\\106\\12\\7\end{bmatrix}\end{array}
\to
\begin{array}{cc} & g=3 \\ \begin{array}{c}0\\1\\2\\3\end{array} & \begin{bmatrix}248\\81\\63\\5\end{bmatrix}\end{array}
\to
\begin{array}{cc} & g=4 \\ \begin{array}{c}0\\1\\2\\3\end{array} & \begin{bmatrix}297\\198\\48\\25\end{bmatrix}\end{array}
\to
\begin{array}{cc} & g=5 \\ \begin{array}{c}0\\1\\2\\3\end{array} & \begin{bmatrix}544\\238\\119\\19\end{bmatrix}\end{array}
$$

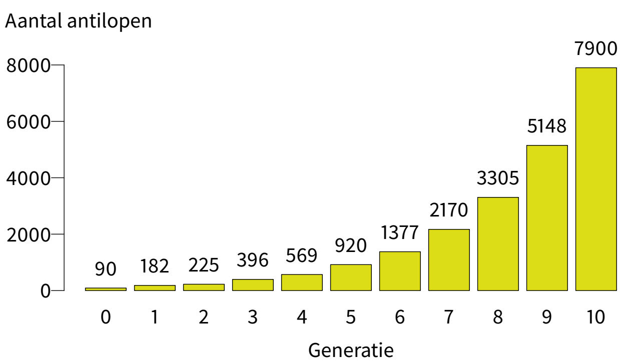
Bepaal het totaal aantal dieren in opeenvolgende generaties:

90, 182, 226, 396, 569, 920, 1377, 2170, 3305, 5148, ...

Bereken de quotiënten van twee opeenvolgende generaties:

2.02, 1.24, 1.75, 1.44, 1.62, 1.50, 1.58, 1.52, 1.56,

Door de quotiënten te bepalen, zie je dat de groeifactor stilaan constant wordt, ongeveer $\boxed{1.55}$. We kunnen dus spreken over een *exponentiële groei*.



(i) We berekenen het gemiddelde aantal nakomelingen van een dier.

$$
\begin{array}{lcccccccc}
 & 100 \text{ dieren} & \to & 80 & \to & 48 & \to & 19.2 & \\
 & & & \downarrow\cdot 2 & & \downarrow\cdot 2 & & \downarrow\cdot 2 & \\
\text{Aantal nakomelingen:} & & & \boxed{100} & + & \boxed{96} & + & \boxed{38.4} & = \boxed{234.4}
\end{array}
$$

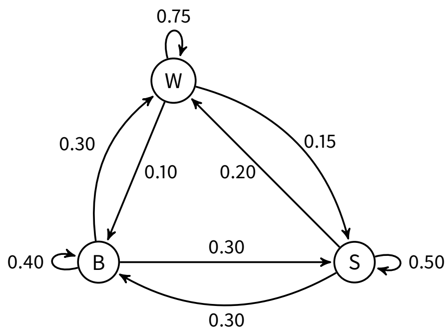
Gemiddeld aantal nakomelingen per dier:

$\frac{234.4}{100} = \boxed{2.344}$.

Het gemiddeld aantal nakomelingen per dier is nu groter dan 1, dus de kudde gaat exponentieel groeien in aantal.

21 (a) $\boxed{\text{25 klanten}}$.

(b) Hetzelfde merk gekocht: $15+25+20=60$ klanten. Gewisseld: $120-60=60$ klanten.
Dus, $\frac{60}{120}=0.50=\boxed{50\,\%}$ van de klanten is gewisseld van waspoeder.

(c) 

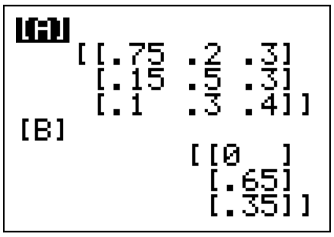
Let op de keuze voor "van.. (*van boven* noteren), naar..."(*opzij* noteren).
En controleer of de som van elke kolom 100 % is.

$$\mathbf{W} = \begin{array}{cc} & \text{Van} \\ & \begin{array}{ccc} W & S & B \end{array} \\ \text{Naatr} \begin{array}{c} W \\ S \\ B \end{array} & \begin{bmatrix} 0.75 & 0.20 & 0.30 \\ 0.15 & 0.50 & 0.30 \\ 0.10 & 0.30 & 0.40 \end{bmatrix} \end{array}$$

(**A** voor de grm)

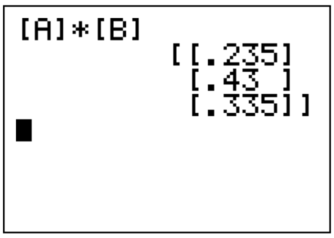
(d) De overgangsperiode is 1 maand.

(e) De beginsituatie is



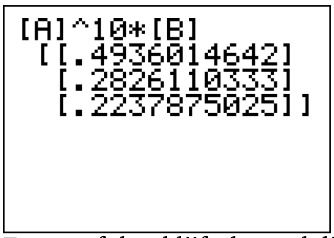
$$\begin{array}{cc} & t{=}0 \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 \\ 0.65 \\ 0.35 \end{bmatrix} \end{array}$$

(f) Na één maand is



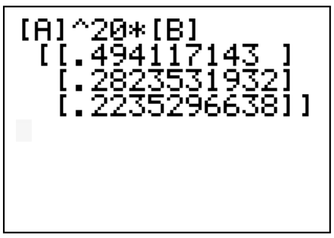
$$\begin{array}{cc} & t{=}1 \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} & \begin{bmatrix} 0.235 \\ 0.430 \\ 0.335 \end{bmatrix} \end{array}$$

(g) Na veel maanden (bijvoorbeeld na 10 maanden)



$$\begin{array}{cc} & t{=}10 \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} & \begin{bmatrix} 0.4940 \\ 0.2825 \\ 0.2235 \end{bmatrix} \end{array}$$

En vanaf dan blijft de verdeling min of meer stabiel.



$$\begin{array}{cc} & t{=}10 \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} & \begin{bmatrix} 0.4940 \\ 0.2825 \\ 0.2235 \end{bmatrix} \end{array}$$

(h) Je ziet dat in de evenwichtssituatie geen van de drie merken zal verdwijnen.