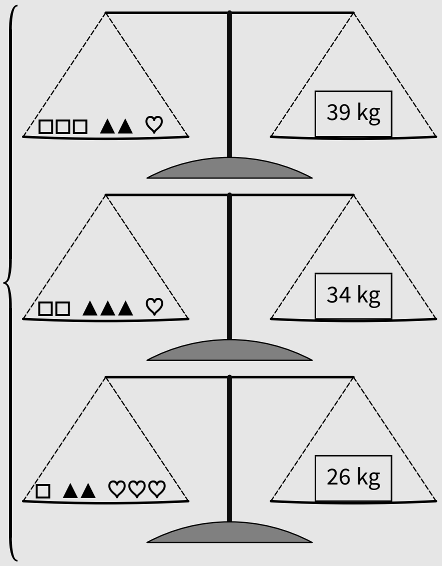
Stelsels van eerstegraadsvergelijkingen

Wilfried Van Hirtum

Versie 1.28 - 24 november 2020



$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \square & \blacktriangle & \heartsuit \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} \textcircled{3} & 2 & 1 & 39 \\ \textcircled{2} & 3 & 1 & 34 \\ \textcircled{1} & 2 & 3 & 26 \end{array}\right] \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \square & \blacktriangle & \heartsuit \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 9.25 \\ 0 & 1 & 0 & 4.25 \\ 0 & 0 & 1 & 2.75 \end{array}\right] \end{array}$$

九章算術

Bronvermelding

De computertekeningen *Apples and Oranges* (zie figuur 5 op pagina 45), *Selected Recent Publications* (zie figuur 6 op pagina 46), *If you build it, he will come* (zie figuur 7 op pagina 46), is met dank ontleend aan W. Hart (`http://www.georgehart.com`).

De afbeeldingen van het achtvlak, het twintigvlak en het twaalfvlak op pagina 58 en verder zijn met dank ontleend aan Dick Klingens `http://www.pandd.demon.nl`. Het copyright van deze afbeelding valt onder de *Creative Commons licentie* `http://creativecommons.org/licenses/by-nc/2.5/nl/`.)

Voorwoord

> *An idea which can be used once is a trick.*
> *If it can be used more than once it becomes a method.*
>
> — George Pólya and Gábor Szegö

> *Denn es ist ausgezeichneter Menschen unwürdig,*
> *gleich Sklaven Stunden zu verlieren mit Berechnungen.*
>
> — Gottfried Willhelm von Leibniz

Je leert in dit boekje stelsels oplossen met een methode die al gebruikt werd circa 200 BCE door Chinezen.

Vandaag heet deze methode de *eliminatietechniek van Gauss*. We beginnen met de methode uit te voeren met pen en papier alleen. Nadien stappen we over naar elektronische hulpmiddelen om stelsels op te lossen, om ons volledig te concentreren op het mathematiseren van toepassingen.

Wilfried Van Hirtum

九章算術

Jiuzhang Suanshu

(*Negen hoofdstukken over wiskunde*)

Inhoudsopgave

1 Een voorbeeld

Kim gaat elke maand drank kopen in een drankencentrale in een dorp. Kim krijgt er nooit eenheidsprijzen te zien, er wordt alleen gezegd hoeveel de totaalprijs is. Kim wordt daar behoorlijk nieuwsgierig van en zou wel eens willen weten wat een bak fruitsap, een bak water en een bak halfvolle melk kost.

Kim gebruikt drie totaal verschillende bestellingen om dit uit te vissen, en gaat er van uit dat de eenheidsprijzen voor de drie bestellingen dezelfde blijven.

Een bak fruitsap, een bak water en een bak melk kosten *samen* 30.95 euro.
Twee bakken fruitsap, een bak water en een bak melk kosten samen 44.55 euro.
Twee bakken fruitsap, drie bakken water en vier bakken melk kosten samen 91.25 euro.

We weten (nog) niet hoeveel een bak fruitsap, een bak water, of een bak melk *apart* kost. Er zijn dus drie *onbekenden*: de prijs van een bak fruitsap (x), van een bak water (y), en van een bak melk (z).

Fruitsap	Water	Melk	Totaalprijs
(Aantal bakken)			(euro)
1	1	1	30.95
2	1	1	44.55
2	3	4	91.25

Dit is de bijbehorende tabel met de gegevens.

We kunnen deze tabel wiskundig vertalen in een $\overset{\substack{\text{aantal vergelijkingen}\\ \downarrow}}{3} \times \underset{\substack{\uparrow\\ \text{aantal onbekenden}}}{3}$ *stelsel*.

$$\begin{cases} x + y + z = 30.95 \\ 2x + y + z = 44.55 \\ 2x + 3y + 4z = 91.25 \end{cases} \tag{1}$$

Een stelsel bevat drie groepen van informatie.

$$\mathbf{A} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \end{array} \qquad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 30.95 \\ 44.55 \\ 91.25 \end{bmatrix}$$

De 3×3-matrix **A** met de *coëfficiënten*, de kolommatrix **X** met de *onbekenden* x, y en z, en de kolommatrix **B** met de drie *bekende termen*.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} x & y & z & \\ 1 & 1 & 1 & 30.95 \\ 2 & 1 & 1 & 44.25 \\ 2 & 3 & 4 & 91.25 \end{array}\right]$$

De samenvoeging van de coëfficiëntenmatrix **A** met de kolommatrix van de bekende termen **B** is de *uitgebreide matrix* van het stelsel. De uitgebreide matrix is een 3×4-matrix, en heeft een extra kolom achter de verticale streep. Links van de verticale streep staan de coëfficiënten, achter de verticale streep staan de bekende termen.

Het stelsel zelf is een 3×3 stelsel. Nogmaals, de eerste 3 slaat op het *aantal vergelijkingen*, de tweede 3 geeft het *aantal onbekenden* weer.

2 Voorbeeld 2

Het volgende stelsel heeft een speciale vorm, en daardoor is het *bijna* opgelost.

$$\begin{cases} 2a+b+c+d=14 \\ b-c+d=17 \\ 3c+2d=8 \\ 3d=30 \end{cases} \tag{2}$$

De speciale vorm is nog duidelijker in de bijbehorende uitgebreide matrix van dit 4×4-stelsel.

$$\begin{array}{cccc|c} a & b & c & d & \\ \hline 2 & 1 & 1 & 1 & 14 \\ \mathbf{0} & 1 & -1 & 1 & 17 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & 3 & 2 & 8 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 3 & 30 \end{array}$$

De uitgebreide matrix staat in *rij-echelonvorm* (echelonvorm = trapvorm), met onder de trap allemaal nullen.

Je kunt de oplossing vinden door middel van *achterwaartse substitutie*.

$$\begin{tikzcd}
2a+b+c+d=14 \arrow[r] & 2a+3-4+10=14 \arrow[r] & \boxed{a=2.5} \\
b-c+d=17 \arrow[r] & b+4+10=17 \arrow[r] & \boxed{b=3} \arrow[ull, bend right] \\
3c+2d=8 \arrow[r] & 3c+20=8 \arrow[r] & \boxed{c=-4} \arrow[ull, bend right] \\
3d=30 \arrow[r] & \boxed{d=10} \arrow[ul, bend right] &
\end{tikzcd}$$

Dus,

$$\begin{cases} a=2.5 \\ b=3 \\ c=-4 \\ d=10 \end{cases}.$$

Dit stelsel heeft één welbepaalde oplossing $\boxed{\{\,(2.5,\quad 3,\quad -4,\quad 10)\,\}}$.

3 Voorbeeld 3

Hier is nog een stelsel in rij-echelonvorm, maar er is nog iets eigenaardigs.

$$\begin{cases} a-b=2 \\ b-c=3 \\ c-d=1 \end{cases}$$

$$\begin{array}{cccc|c} \scriptstyle a & \scriptstyle b & \scriptstyle c & \scriptstyle d & \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}$$

Er zijn vier onbekenden (a,b,c,d), maar er zijn *slechts* drie vergelijkingen. Er is dus één stukje informatie tekort. Er is dus niet één welbepaalde oplossing.

We kunnen ook achterwaartse substitutie uitvoeren, maar er blijft vrijheid in het kiezen van de waarde van de onbekende d.

$$\left\{ \begin{tikzcd} a-b=2 \arrow[r] & a=b+2 \arrow[r] & \boxed{a=r+6} \\ b-c=3 \arrow[r] & b=c+3 \arrow[r] & \boxed{b=r+4} \arrow[ul, bend right] \\ c-d=1 \arrow[r] & c=d+1 \arrow[r] & \boxed{c=r+1} \arrow[ul, bend right] \\ d=\text{vrij te kiezen, zeg } r\in\mathbb{R} \arrow[rr] & & \boxed{d=r} \arrow[ul, bend right] \end{tikzcd} \right.$$

Dus,

$$\begin{cases} a=r+6 \\ b=r+4 \\ c=r+1 \\ d=r\in\mathbb{R} \end{cases} .$$

Dit stelsel heeft *oneindig veel* oplossingen $\boxed{\{\,(r+6,\ r+4,\ r+1,\ r);r\in\mathbb{R}\}}$.

De laatste twee voorbeeldstelsels waren vrij snel te lossen, dankzij de rij-trapvorm. Je kunt dus wel denken dat we best een strategie ontwikkelen om willekeurige stelsels *eerst* in rij-trapvorm te brengen. We zeggen eerst wat een rij-trapvorm precies is.

4 De *Row Echelon Form*

In voorbeeld 2 en 3 ging het over stelsels in de rij-trapvorm. We gebruiken voortaan de Engelse benaming *row echelon form*, zoals in de grafische rekenmachine.

Zo'n *row echelon form* is handig om de oplossing te vinden door achterwaartse substitutie. We beschrijven nog eens precies wat zo'n rij-trapvorm is.

Row Echelon Form

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc|c} a & b & c & d & \\ \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

In de *row echelon form* van de uitgebreide matrix geldt:

- elke volgende rij *begint met meer nullen* dan de voorgaande rijen.

Met andere woorden, de *hoofdelementen* van de rijen staan in *trapvorm* (echelon form).

Merk op: in een *row echelon form* zijn er dus steeds *evenveel hoofdelementen* als er *rijen* zijn (na het schrappen van de nulrijen).

Het hoofdelement van een rij

Het *hoofdelement van een rij* is het *eerste niet-nul* element in die rij.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc|c} a & b & c & d & \\ \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 10 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{array}\right] \end{array} \quad \text{Nulrij schrappen}$$

Alle nulrijen staan bijgevolg onderaan. Schrap de nulrijen, want die bevatten toch geen nuttige informatie.

5 Voorbeeld 4

Hier is nog iets eigenaardigs aan de hand.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc|c} a & b & c & d & \\ \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10^{-} \end{array}\right] \end{array} \quad \text{Tegenspraak}$$

Er is een rij met allemaal nullen links van de streep, en een niet-nul getal achter de streep. Deze vergelijking leest dus als

$$0a + 0b + 0c + 0d = 10.$$

Of nog,

$$0 = 10.$$

Dit is een *tegenspraak*, een onware uitspraak. Dit stelsel heeft dus *geen* oplossingen. Het stelsel is een *vals* stelsel.

We gaan nu een strategie ontwikkelen om de uitgebreide matrix van een stelsel in de *row echelon form* te brengen, of zelfs nog verder in de *reduced row echelon form*. Deze laatste vorm bevatten nog meer nullen, zodat we de oplossing direct kunnen aflezen. De methode was al bekend bij de Chinezen van de Han-dynastie.

6 Een Chinese methode

De oudste opgeschreven analyse van gelijktijdige vergelijkingen staat in het Chinese boek *Jiuzhang Suanshu* (Negen hoofdstukken over wiskunde) van ongeveer 200 jaar BCE ten tijde van de Han-dynastie. In het begin van hoofdstuk acht verschijnt een probleem van de volgende vorm:

> Drie zakken graan van eerste kwaliteit, twee zakken van middelmatige kwaliteit en een zak van slechte kwaliteit kosten samen 39 dou. Voorts, twee zakken graan van eerste, drie van middelmatige kwaliteit en een van slechte kwaliteit kosten samen 34 dou. Tenslotte, een zak van eerste, twee van middelmatige en drie van slechte kwaliteit kosten samen 26 dou. Welke prijs krijgt men voor elke zak van eerste, middelmatige en slechte kwaliteit?

Vandaag zouden wij het probleem formuleren als volgt (waarbij x, y en z de prijs voorstellen van een zak van respectievelijk eerste, middelmatige en slechte kwaliteit).

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 39 \\ 2x + 3y + z = 34 \\ x + 2y + 3z = 26 \end{cases}$$

De Chinezen ten tijde van de Han-dynastie noteerden dit probleem al met behulp van een *tabel*, bijna op dezelfde manier als wij het vandaag doen. De moderne vorm van zo'n tabel heet (uitgebreide) *matrix*.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 39 \\ 2 & 3 & 1 & 34 \\ 1 & 2 & 3 & 26 \end{array}\right] \end{array}$$

De oplossing volgens het boek *Jiuzhang Suanshu* gaat als volgt. De moderne naam van deze methode is de *eliminatie van Gauss*.

De strategie is om in elke stap één vergelijking te behouden, en alle andere vergelijkingen te vervangen door eenvoudiger vergelijkingen. Deze eenvoudiger maar gelijkwaardige vergelijkingen bevatten één onbekende minder. We zeggen dat deze onbekende is *geëlimineerd* uit die vergelijkingen. We zien in de uitgebreide matrix dus *meer nullen* verschijnen.

We gebruiken *elementaire rij-bewerkingen* om vergelijkingen te vervangen door eenvoudiger vergelijkingen, met de bedoeling dat deze nieuwe vergelijkingen minder onbekenden bevatten. Hier zijn de drie elementaire rij-bewerkingen.

Elementaire rij-bewerking 1

Je mag steeds twee of meer *rijen* van plaats *wisselen*.

Dat is vanzelfsprekend. Het speelt geen rol in welke volgorde je alle gegeven informatie opschrijft.

Elementaire rij-bewerking 2

Je mag steeds (beide leden van) een vergelijking vermenigvuldigen met een niet-nul getal.

Deze regel is nuttig bij het *vereenvoudigen* van één vergelijking apart. Je kunt met deze regel bijvoorbeeld coëfficiënten kleiner maken, of komma's vermijden.

Deze bewerking heet een *elementaire rij-bewerking* omdat deze bewerking een gegeven stelsel ombouwt tot een *gelijkwaardig* stelsel. Deze bewerking is immers *inverteerbaar*. Je kunt dit proces immers omkeren door beide leden terug te delen door deze niet-nul factor. Je gaat dat natuurlijk niet doen, maar je kán het doen, om de oorspronkelijke vergelijking terug te krijgen. Hier is nog zo'n elementaire bewerking.

Elementaire rij-bewerking 3

Je mag steeds een vergelijking vervangen door een *niet-nul veelvoud van zichzelf* verminderd met een *veelvoud van een andere* vergelijking.

Deze elementaire rij-bewerking 3 is de bewerking die de uitgebreide matrix verder in *row echelon form* brengt.

Door de juiste veelvouden te kiezen, kun je nog meer onbekenden elimineren, en dus nog meer nullen bijmaken in de uitgebreide matrix van het stelsel.

Deze bewerking is ook inverteerbaar, want door die andere vergelijking er terug bij op te tellen, is de oude vergelijking terug hersteld. Dus, door deze drie elementaire rij-bewerkingen te gebruiken, gaat geen informatie verloren, en worden er ook geen oplossingen bijgemaakt. We verkrijgen dus steeds gelijkwaardige stelsels als je deze elementaire rij-bewerkingen één of meerdere keren uitvoert.

We gaan nu het stelsel in het Chinese voorbeeld oplossen.

$$\begin{cases} 3x+2y+z=39 \\ 2x+3y+z=34 \\ x+2y+3z=26 \end{cases} \qquad \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x & y & z & & \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} \textcircled{3} & 2 & 1 & 39 \\ \textcircled{2} & 3 & 1 & 34 \\ \textcircled{1} & 2 & 3 & 26 \end{array}\right] \end{array}$$

Stap 1 – de kolom van de onbekende x vegen

Kies een eerste spil.

Spil kiezen

Je mag eender welke niet-nul coëfficiënt kiezen als spil in deze eerste stap.

Dus, spillen zijn steeds verschillend van nul.

De rij waarin de spil staat, heet de *spilrij*. Het is de bedoeling om de spilrij te behouden, en in alle andere vergelijkingen de onbekende die bij deze spil hoort, te *elimineren*.

We kiezen gemakshalve een spil in de eerste rij, dus we kiezen bijvoorbeeld ③ als spil. De onbekende die bij deze spil hoort is dus x.

We willen dus in alle andere vergelijkingen x elimineren. Deze vergelijkingen zullen dus geen x meer bevatten. Ze zijn dus eenvoudiger geworden. We zeggen: we *vegen* de kolom van x.

We vegen deze spilkolom (de kolom van x) door middel van elementaire rij-bewerking 3.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} \textcircled{3} & 2 & 1 & 39 \\ \textcircled{2} & 3 & 1 & 34 \\ \textcircled{1} & 2 & 3 & 26 \end{array}\right] \end{array} \quad \begin{array}{l} \\ \textcircled{3}\cdot R_2 - \textcircled{2}\cdot R_1 \\ \textcircled{3}\cdot R_3 - \textcircled{1}\cdot R_1 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 39 \\ \mathbf{0} & 5 & 1 & 24 \\ \mathbf{0} & 4 & 8 & 39 \end{array}\right] \end{array}$$

Vermenigvuldig alle getallen uit de tweede rij met de spil $\textcircled{3}$, en alle getallen van de eerste rij met $\textcircled{2}$ (het getal op de tweede rij in de spilkolom), en maak dan het verschil van deze twee rijen. Je ziet dat in de tweede rij een nul verschijnt.

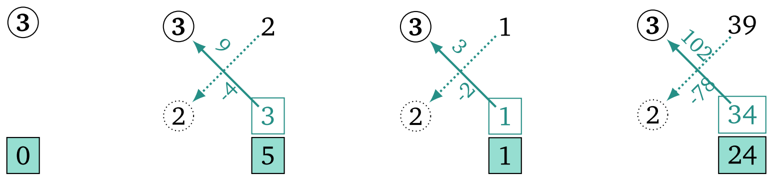
Doe deze elementaire rij-bewerking ook met de derde rij. Dus, vermenigvuldig alle getallen uit de derde rij met de spil $\textcircled{3}$, en alle getallen van de eerste rij met $\textcircled{1}$ (het getal op de derde rij in de spilkolom), en maak het verschil van deze twee rijen. Je ziet nu dat ook in de derde rij een nul verschijnt. Je ziet dat de kolom van x *geveegd* is. Dus, de laatste twee vergelijkingen bevatten geen termen met x: ze vormen dus een kleiner 2×2 stelsel met de enige onbekenden y en z.

Je hebt nu duidelijk gezien dat de elementaire rij-bewerking 3 twee keer is gebruikt. Daarbij ontstaan dus twee nieuwe vergelijkingen (tweede en derde vergelijking), waar de onbekende x is geëlimineerd.

Diagonaalproducten

Hier is een handige manier om de nieuwe vergelijkingen te berekenen. Je kunt de coëfficiënten van de nieuwe vergelijkingen zien als *het verschil van twee diagonaalproducten*.

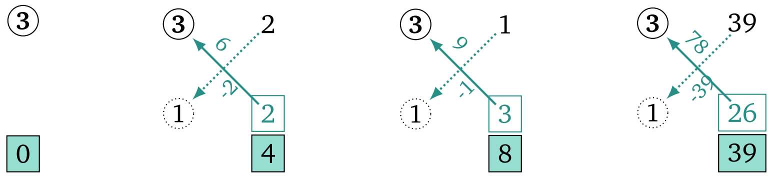
Schematisch, de nieuwe tweede vergelijking:



Bekijk in de uitgebreide matrix *denkbeeldige rechthoeken*, met op de ene diagonaal de spil en de oude te vervangen coëfficiënt, bijvoorbeeld $\boxed{3}$. Maak het product van deze diagonaal (volle pijl, de pijl wijst naar de spil), en verminder met het product van de andere diagonaal (stippellijn). Dus, *naar de spil*: gewoon diagonaalproduct, bijvoorbeeld $3 \cdot 3 = 9$, en *min* het andere diagonaalproduct, bijvoorbeeld $2 \cdot 2 = 4$. We hebben dus: $9 - 4 = \boxed{5}$.

Op dezelfde manier: $3 - 2 = \boxed{1}$, en $102 - 78 = \boxed{24}$.

Schematisch, de nieuwe derde vergelijking:

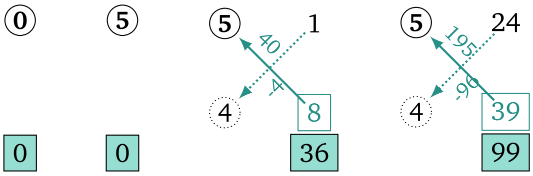


Je ziet dat de spil een belangrijke rol speelt. Daarom heet deze manier van rekenen de *spilmethode*.

Stap 2 – de kolom van de onbekende y vegen

Kies een nieuwe spil in een *andere rij* dan de vorige spil, Dus, we kiezen een nieuwe spil, ofwel in rij 2, ofwel in rij 3. We gebruiken nu de gemakshalve de tweede rij als spilrij.

$$\begin{array}{ccc|c} x & y & z & \\ \hline 3 & 2 & 1 & 39 \\ 0 & \textcircled{5} & 1 & 24 \\ 0 & \textcircled{4} & 8 & 39 \end{array} \qquad \textcircled{5}\cdot R_3 - \textcircled{4}\cdot R_2$$



$$\begin{array}{ccc|c} x & y & z & \\ \hline 3 & 2 & 1 & 39 \\ \mathbf{0} & 5 & 1 & 24 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & 36 & 99 \end{array}$$

Bekijk dus telkens een denkbeeldige rechthoek. *Naar de spil* vormt het ene diagonaalproduct. *min* het andere diagonaalproduct.

Stap 3 – achterwaartse substitutie

$$\begin{array}{ccc|c} x & y & z & \\ \hline 3 & 2 & 1 & 39 \\ \mathbf{0} & 5 & 1 & 24 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & 36 & 99 \end{array}$$

De uitgebreide matrix is een *bovendriehoeksmatrix* geworden, klaar voor *achterwaartse substitutie*. Je kunt de waarde van z berekenen uit de *onderste* vergelijking.

$$36z = 99 \qquad z = \frac{99}{36} = \boxed{2.75}$$

Je kunt vervolgens deze waarde van z invullen in de *voorlaatste* vergelijking, en op die manier de waarde van y berekenen.

$$5y + 2.75 = 24 \qquad y = \frac{24 - 2.75}{5} = \boxed{4.25}$$

Door telkens de reeds gevonden waarden voor de onbekenden *van onder naar boven* in te vullen, komt de oplossing tevoorschijn.

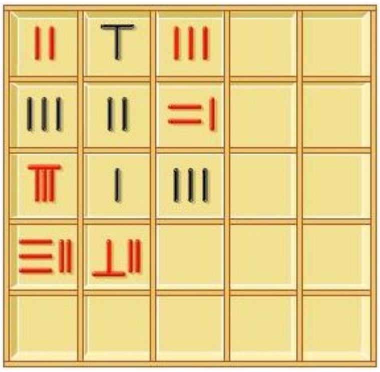
$$3x + 2\cdot 4.25 + 2.75 = 39 \qquad x = \frac{39 - 2\cdot 4.25 - 2.75}{3} = \boxed{9.25}$$

Dit stelsel heeft één welbepaalde oplossing $\boxed{\{\,(9.25,\quad 4.25,\quad 2.75)\,\}}$.

Besluit

$x = 9.25$, $y = 4.25$ en $z = 2.75$, of de eenheidsprijzen van de drie soorten graan zijn respectievelijk 9.25 dou, 4.25 dou en 2.75 dou.

Chinese methode versus Eliminatie van Gauss



De Chinezen gebruikten gekleurde bamboestokjes voor getallen, en schreven de vergelijkingen in *kolommen*, van rechts naar links. Een *leeg vakje* stelt nul voor.

$$\begin{cases} 3x+21y-3z=0 \\ -6x-2y-z=62 \\ 2x-3y+8z=32 \end{cases}$$

▬ Negatief

🟥 Positief

Deze Chinese telbordtechnieken en vuistregels vonden hun weg naar Japan en verschenen later ook in Europa, waarbij de gekleurde bamboestokjes (zwart voor negatieve getallen, en rood voor positieve getallen) vervangen werden door cijfers en het rekenbord door pen en papier.

Figuur 1 – Carl Friedrich Gauss op een Duits bankbiljet uit 1991

In Europa werd deze techniek bekend als de *eliminatiemethode van Gauss* naar de Duitse wiskundige Carl Gauss. Carl Friedrich Gauss (1777-1855) is volgens velen de grootste wiskundige die ooit heeft geleefd. Zijn bijnaam is: ‘Prins van de wiskundigen’. Hij maakte veel gebruik van deze methode. Daardoor werd de eliminatietechniek zeer populair.

De eliminatietechniek van Gauss stopt bij een *row echelon form*.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 39 \\ \mathbf{2} & 3 & 1 & 34 \\ \mathbf{1} & 2 & 3 & 26 \end{array}\right] \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} \textcircled{3} & 2 & 1 & 39 \\ \mathbf{0} & \textcircled{5} & 1 & 24 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \textcircled{36} & 99 \end{array}\right] \end{array} \rightarrow \begin{cases} x=(39-2\cdot 4.25-2.75)/3=9.25 \\ y=(24-2.75)/5=4.25 \quad \text{substitutie} \\ z=99/36=2.75 \quad \text{substitutie} \end{cases}$$

Eliminatie van Gauss-Jordan

De eliminatietechniek van Gauss kan echter nog verfijnd worden, zodat de fase van de achterwaartse substitutie niet meer nodig is. Deze techniek staat bekend als de *eliminatietechniek van Gauss-Jordan*. Het betreft hier de Duitse landmeter en wiskundige Wilhelm Jordan (1842-1899).

De eliminatietechniek van Gauss-Jordan gaat nog verder tot een *reduced row echelon form*, zodat de oplossing direct zichtbaar is (maar kost meer berekeningen, maar achterwaartse substitutie is niet meer nodig).

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \textcircled{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 9.25 \\ \mathbf{0} & \textcircled{1} & \mathbf{0} & 4.25 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \textcircled{1} & 2.75 \end{array}\right] \qquad \begin{cases} x=9.25 \\ y=4.25 \\ z=2.75 \end{cases}$$

7 De *Reduced Row Echelon Form*

Reduced Row Echelon Form

Voorbeeld

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x & y & z & \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 0 & 0 & -1 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 2 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 1 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{array}\right] \end{array} \quad \text{Nulrij schrappen}$$

De *reduced row echelon form* (Rref) van de uitgebreide matrix is een matrix die aan de volgende voorwaarden voldoet.

- De matrix staat in *row echelon form*, dus de hoofdelementen van de rijen staan in trapvorm.
- De *kolommen* van de hoofdelementen zijn *geveegd*, dus boven en onder elk hoofdelement staat een nul.
- Elk *hoofdelement is gelijk aan 1*.

Een kolom vegen

Een *geveegde kolom* is een kolom van coëfficiënten, waarvan slechts één coëfficiënt verschillend van nul is. De overige coëfficiënten in die kolom zijn dus nul.

8 Opdrachten

1 Schrijf de uitgebreide matrix die bij het volgende stelsel hoort.

$$\begin{cases} 5y+3x+10=3z+2x+30 \\ 5z=70 \\ 3x+2y+z=x-y \end{cases}$$

2 Schrijf het stelsel dat bij de volgende uitgebreide matrix hoort.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 13 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 17 \end{array}\right] \end{array}$$

3 Zoek door middel van achterwaartse substitutie de oplossing van het stelsel.

$$\begin{cases} 5x+3y+z=96.05 \\ 2y+3z=46.70 \\ 4z=48 \end{cases}$$

4 Gegeven, het stelsel

$$\begin{cases} 5x+3y+z=96.05 \\ 2y+3z=46.70 \\ 4z=48 \end{cases}.$$

Welk soort stelsel is dit?

A 3 × 2-stelsel
B 3 × 3-stelsel
C 3 × 4-stelsel
D 4 × 3-stelsel

5 Gegeven, het stelsel

$$\begin{cases} 5x+3y+z=96.05 \\ 2y+3z=46.70 \\ 4z=48 \end{cases}.$$

Welke afmeting heeft de uitgebreide matrix van dit stelsel?

A 3 × 2
B 3 × 3
C 3 × 4
D 4 × 3

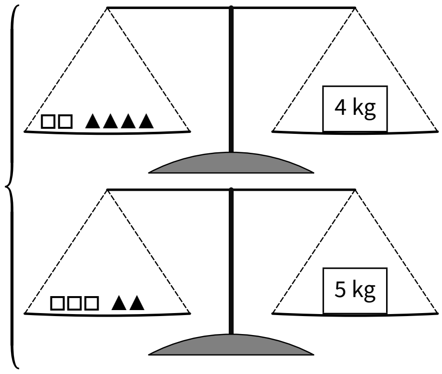
6 Zoek door middel van achterwaartse substitutie de oplossing van het stelsel.

$$\begin{cases} a+2b+3c+4d=58 \\ 5b-2c+3d=-23 \\ -c+5d=-7 \\ 2d=4 \end{cases}$$

7 Zoek door middel van achterwaartse substitutie de oplossing van het stelsel met de volgende uitgebreide matrix (de onbekenden zijn a, b , c en d).

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 7 & 1 & 13 \\ 0 & 0 & 3 & -5 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 4 \end{array}\right]$$

8



Veronderstel dat alle blokjes (□) — op beide weegschalen — evenveel wegen en dat alle driehoekjes (▲) ook evenveel wegen. Driehoekjes hebben echter een ander gewicht dan blokjes. Beide weegschalen zijn in evenwicht.

Hoeveel weegt dan een □ en hoeveel weegt een ▲?

Zoek de oplossing met behulp van de Chinese eliminatietechniek.

9 Drie soorten stelsels

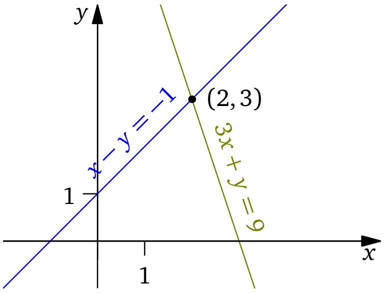
Er zijn drie soorten stelsels van eerstegraadsvergelijkingen, qua aantal oplossingen:

- Het stelsel heeft juist één oplossing (*bepaald stelsel*);
- Het stelsel heeft oneindig veel oplossingen (*onbepaald stelsel*);
- Het stelsel heeft geen oplossing (*vals stelsel*).

9.1 Bepaald stelsel – voorbeeld 1

$$\begin{cases} x-y=-1 \\ 3x+y=9 \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{cc|c} x & y & \\ 1 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & 9 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{rref}} \left[\begin{array}{cc|c} x & y & \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

Een 2×2 stelsel, met de bijbehorende uitgebreide 2×3 matrix.



Elke vergelijking stelt een rechte voor in het xy-vlak.

Omdat een oplossing (x, y) van het stelsel moet voldoen aan *alle* vergelijkingen van het stelsel, stelt de oplossing een punt voor dat op *beide* rechten ligt (het snijpunt van beide rechten).

De twee rechten snijden elkaar in het punt $\boxed{(2,3)}$, dus het stelsel heeft juist één oplossing. Het stelsel is een *bepaald stelsel*.

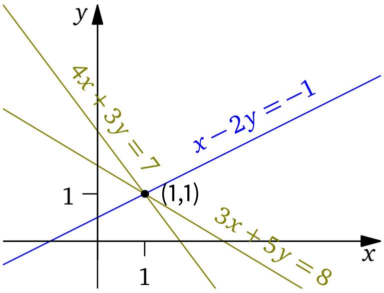
We controleren deze oplossing.

$$\begin{cases} \mathbf{2}-\mathbf{3}=-1 & \checkmark \\ 3\cdot\mathbf{2}+\mathbf{3}=9 & \checkmark \end{cases}$$

9.2 Bepaald stelsel – voorbeeld 2

$$\begin{cases} x-2y=-1 \\ 3x+5y=8 \\ 4x+3y=7 \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{cc|c} x & y & \\ 1 & -2 & -1 \\ 3 & 5 & 8 \\ 4 & 3 & 7 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{rref}} \left[\begin{array}{cc|c} x & y & \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{array}\right]$$

Een 3×2 stelsel, met de bijbehorende uitgebreide 3×3 matrix.



De drie rechten snijden elkaar in het punt $\boxed{(1,1)}$, dus het stelsel heeft juist één oplossing. Het stelsel is een *bepaald stelsel*.

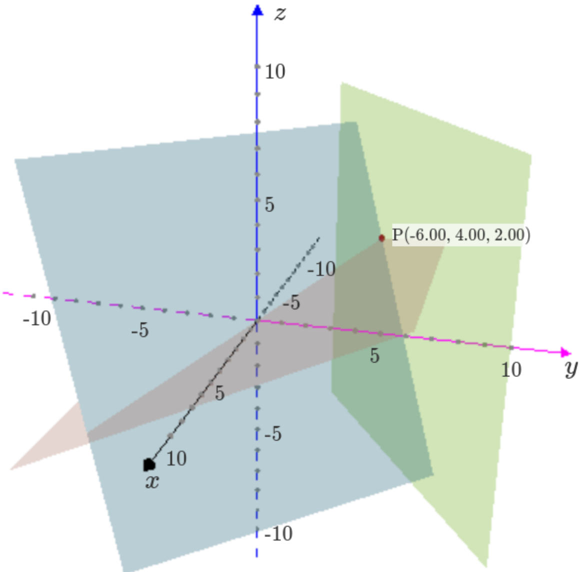
We controleren deze oplossing.

$$\begin{cases} \mathbf{1}-2\cdot\mathbf{1}=-1 & \checkmark \\ 3\cdot\mathbf{1}+5\cdot\mathbf{1}=8 & \checkmark \\ 4\cdot\mathbf{1}+3\cdot\mathbf{1}=7 & \checkmark \end{cases}$$

9.3 Bepaald stelsel – voorbeeld 3

$$\begin{cases} -2x+3y=24 \\ x+y+z=0 \\ -3y+6z=0 \end{cases} \quad \begin{array}{c} \begin{array}{ccc|c} x & y & z & \\ \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 3 & 0 & 24 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 6 & 0 \end{array}\right] \end{array} \xrightarrow{\text{rref}} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc|c} x & y & z & \\ \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \end{array}$$

Een 3×3 stelsel, met de bijbehorende uitgebreide 3×4 matrix.



Elke vergelijking stelt een *vlak* in de ruimte voor.

Een oplossing (x, y, z) van het stelsel moet voldoen aan *alle* vergelijkingen van het stelsel. Dus, de oplossing stelt een punt voor dat in *alle drie* de vlakken ligt (het snijpunt $\boxed{(-6,4,2)}$ van de drie vlakken).

Het stelsel is een *bepaald stelsel*.

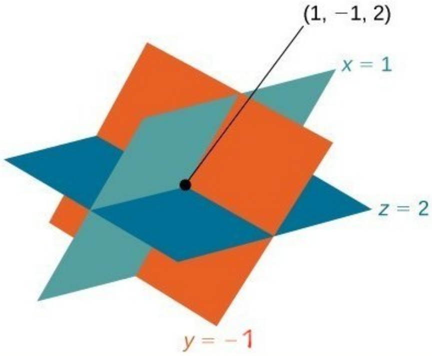
Bron: `http://www.intmath.com/matrices-determinants/systems-equations-interactive.php`

We controleren deze oplossing.

$$\begin{cases} -2\cdot(\mathbf{-6})+3\cdot\mathbf{4}=24 & \checkmark \\ \mathbf{-6}+\mathbf{4}+\mathbf{2}=0 & \checkmark \\ -3\cdot\mathbf{4}+6\cdot\mathbf{2}=0 & \checkmark \end{cases}$$

9.4 Bepaald stelsel – voorbeeld 4

$$\begin{cases} x-2y+3z=9 \\ -x+3y-z=-6 \\ 2x-5y+5z=17 \end{cases} \quad \begin{array}{c} \begin{array}{ccc|c} x & y & z & \\ \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 9 \\ -1 & 3 & -1 & -6 \\ 2 & -5 & 5 & 17 \end{array}\right] \end{array} \xrightarrow{\text{rref}} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc|c} x & y & z & \\ \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \end{array}$$



Het snijpunt van de drie vlakken is $\boxed{(1,-1,2)}$.

Het stelsel is een *bepaald stelsel*.

We controleren deze oplossing.

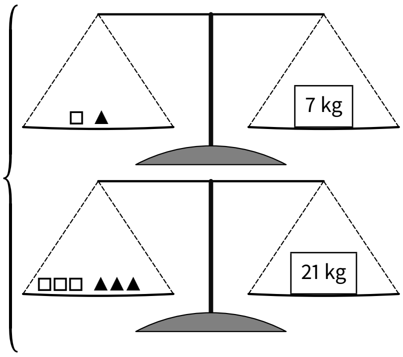
$$\begin{cases} \mathbf{1}-2\cdot(\mathbf{-1})+3\cdot\mathbf{2}=1+2+6=9 & \checkmark \\ \mathbf{-1}+3\cdot(\mathbf{-1})-\mathbf{2}=-1-3-2=-6 & \checkmark \\ 2\cdot\mathbf{1}-5\cdot(\mathbf{-1})+5\cdot\mathbf{2}=2+5+10=17 & \checkmark \end{cases}$$

Bepaald stelsel

Een stelsel met juist *één oplossing* heet een *bepaald stelsel*.

De bijbehorende *reduced row echelon form* is een *diagonaalmatrix* (vierkante matrix met op de hoofddiagonaal enen, erbuiten nullen), uitgebreid met een kolom met *de* oplossing. Er zijn dus *evenveel* hoofdelementen als onbekenden.

9.5 Onbepaald stelsel – voorbeeld 5



$$\begin{cases} x+y=7 \\ 3x+3y=21 \end{cases} \qquad \begin{array}{c} \begin{array}{cc|c} x & y & \\ \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 7 \\ \cancel{3} & \cancel{3} & \cancel{21} \end{array}\right] \end{array} \xrightarrow{\text{rref}} \begin{array}{c} \begin{array}{cc|c} x & y & \\ \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 7 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{array}\right] \end{array}$$

Deze vergelijkingen zijn *niet* onafhankelijk van elkaar. De tweede vergelijking is een veelvoud van de eerste, en is dus overbodig.

In feite zijn er *oneindig* veel oplossingen.

$$\begin{cases} x = 7 - r \\ y = r \in \mathbb{R} \end{cases} .$$

Enkele oplossingen: $(3,4)$, $(0,7)$, $(-2.5,-4.5)$. Het enige dat je weet is dat de som van x en y zeven is. Je kunt bijvoorbeeld y vrij kiezen, en x hangt dan af van deze keuze van y. De onbekende x is de *hoofdonbekende*, en y is de *nevenonbekende* (vrij te kiezen). Het vrij te kiezen getal r heet een *parameter*.

De oplossingenverzameling is $\boxed{\{\,(7-r,\ r);\ r \in \mathbb{R}\}}$.

9.6 Onbepaald stelsel – voorbeeld 6

Onbepaald stelsel

Een stelsel met oneindig veel oplossingen heet een *onbepaald stelsel*. Bijvoorbeeld,

$$\begin{cases} \mathbf{a} = d+6 \\ \mathbf{b} = d+4 \\ \mathbf{c} = d+2 \end{cases} \qquad \begin{array}{c} \begin{array}{cccc|c} a & b & c & d & \\ \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & 0 & 0 & -1 & 6 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & -1 & 2 \end{array}\right] \end{array} .$$

Na het schrappen van de overbodige vergelijkingen schieten er *minder* vergelijkingen over dan het aantal onbekenden. Het opgelost stelsel is dan *geen vierkant* stelsel meer.

Er zijn in dit voorbeeld *slechts drie hoofdonbekenden* **a**, **b**, **c**. De hoofdonbekenden komen overeen met de *hoofdelementen* van de reduced row echelon form.

De onbekenden die niet bij een hoofdelement horen, heten *nevenonbekenden*, en zijn dus een vrije *parameter* in $\mathbb{R}$.

De oplossingenverzameling is $\boxed{\{\,(r+6,\ r+4,\ r+2,\ r);\ r \in \mathbb{R}\}}$.

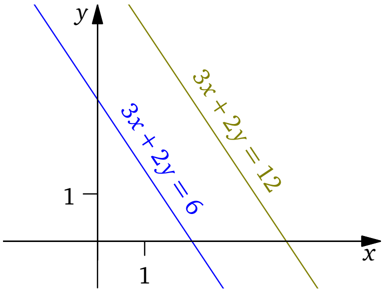
Enkele oplossingen: $(7,5,3,1)$, $(5,3,1,-1)$, $(6,4,2,0)$, $(106,104,102,100)$, $(17,15,13,11)$[a].

---

[a] de leeftijd van mijn kinderen, op het ogenblik dat de eerste versie van dit boekje geschreven werd

9.7 Vals stelsel – voorbeeld 7

$$\begin{cases}3x+2y=12\\3x+2y=6\end{cases} \qquad \left[\begin{array}{cc|c} x & y & \\ 3 & 2 & 12 \\ 3 & 2 & 6 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{rref}} \left[\begin{array}{cc|c} x & y & \\ 1 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \ \text{Onwaar}$$



Elke vergelijking stelt een rechte voor in het xy-vlak.

De twee rechten zijn strikt evenwijdig, dus hebben geen punten gemeenschappelijk. Het stelsel is een *vals stelsel*.

Inderdaad als $3x+2y$ gelijk is aan 6, dan kan $3x+2y$ niet tegelijkertijd gelijk zijn aan 12. De twee vergelijkingen *spreken elkaar tegen*.

Vals stelsel

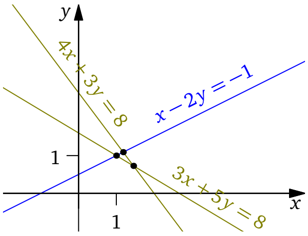
Een vals stelsel is een stelsel dat leidt tot een *tegenspraak*.

Een vals stelsel heeft *geen oplossingen*.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} x & y & z & \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \ \text{Onwaar}$$

De bijbehorende reduced row echelon form bevat een rij met een *onwaarheid*: nullen vóór de streep, en een niet-nul getal achter de streep van de uitgebreide matrix.

9.8 Vals stelsel – voorbeeld 8



$$\begin{cases}x-2y=-1\\3x+5y=8\\4x+3y=8\end{cases} \qquad \left[\begin{array}{cc|c} x & y & \\ 1 & -2 & -1 \\ 3 & 5 & 8 \\ 4 & 3 & 8 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{rref}} \left[\begin{array}{cc|c} x & y & \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \ \text{Onwaar}$$

Er is geen enkel punt dat op *alle drie* de rechten ligt.

9.9 Het soort stelsel bepalen

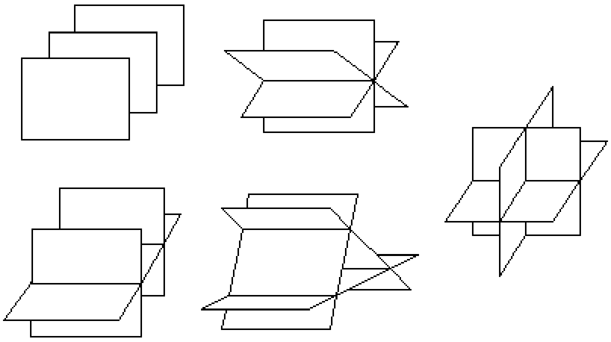
Hoe weet je nu of een stelsel bepaald, onbepaald of vals is?

Antwoord is: zoek de *reduced row echelon form*, en lees de oplossingen af.

Hoe zoek je de reduced row echelon form? Antwoord: door middel van de eliminatiemethode van Gauss (met daarna achterwaartse substitutie), of Gauss-Jordan (spilmethode).

10 Opdrachten

9



Dit zijn de mogelijke liggingen van drie verschillende vlakken in de ruimte. Het volgende stelsel beschrijft zo'n drietal vlakken.

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases}$$

(a) Welke liggingen geven aanleiding tot een bepaald stelsel?

(b) Welke liggingen geven aanleiding tot een onbepaald stelsel?

(c) Welke liggingen geven aanleiding tot een vals stelsel?

10 Gegeven, drie vlakken in de ruimte

$$\begin{cases} 3x + 2y - z = 1 \\ 2x - 2y + 4z = -2 \\ -x + \frac{1}{2}y - z = 0 \end{cases} .$$

Bepaal de doorsnede van deze drie vlakken.

11 Kan een stelsel van eerstegraadsvergelijkingen precies vier oplossingen hebben?

12 Van welke soort zijn de volgende stelsels?

(a) $\begin{cases} a = 11 \\ b = 13 \\ c = 15 \\ d = 17 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} a = 11 \\ a + b = 11 \\ a + c = 15 \\ a + d = 17 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} a + b = 11 \\ a - b = 11 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} 3a - 5b = 11 \\ 6a - 10b = 20 \end{cases}$

13 Wat verstaat men onder *gelijkwaardige* stelsels?

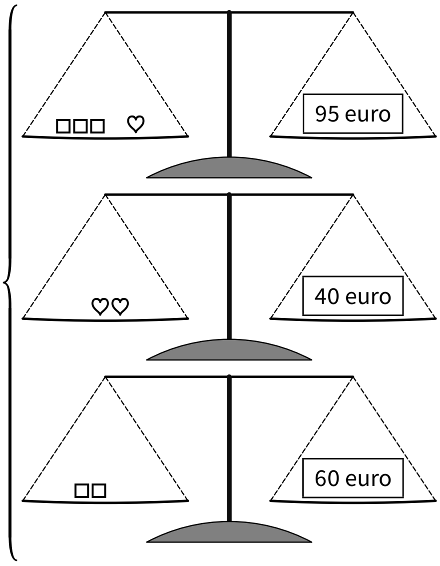
- A Stelsels met evenveel vergelijkingen
- B Stelsels met evenveel onbekenden
- C Stelsels met dezelfde oplossingen

14 De oplossing van een stelsel is $(3.4, 5)$. Dit stelsel heeft

- A één oplossing;
- B twee oplossingen;
- C drie oplossingen.

15 Hoe ziet een 2×4 stelsel er uit?

16



Welk soort stelsel wordt hier voorgesteld?

A Een bepaald stelsel
B Een onbepaald stelsel
C Een vals stelsel

17 Zoek twee getallen waarvan de som gelijk is aan 10.

(a) Noteer letters voor de onbekenden.

(b) Noteer het bijbehorende stelsel.

(c) Noteer een gereduceerde rij-trapvorm (reduced row echelon form).

(d) Noteer de oplossingenverzameling.

18 Bereken uit de volgende oplossingenverzamelingen van de onbepaalde stelsels telkens drie oplossingen.

(a) $\{\,(2,\ r,\ r);\ r\in\mathbb{R}\}$.

(b) $\{\,(r,\ s,\ 2r);\ r,s\in\mathbb{R}\}$.

Hoe noem je zo'n onbepaald stelsel?

(c) $\{\,(r+2,\ 0,\ r);\ r\in\mathbb{R}\}$.

(d) $\{\,(r,\ s,\ r+s,\ t,\ 5);\ r,s,t\in\mathbb{R}\}$.

Hoe noem je zo'n onbepaald stelsel?

19 Gegeven, de oplossingenverzameling van een stelsel,

- Noteer telkens het opgelost stelsel;
- Vermeld telkens ook of het stelsel bepaald is of onbepaald (enkelvoudig, tweevoudig of drievoudig onbepaald).

(a) $\{\,(r,\ 2r);\ r\in\mathbb{R}\}$.

(b) $\{\,(-1,\frac{2}{3},4)\,\}$.

(c) $\{\,(2,\ r,\ 3-r);\ r\in\mathbb{R}\}$.

(d) $\{\,(r,\ r-s,\ s);\ r,s\in\mathbb{R}\}$.

(e) $\{\,(1+\frac{r}{2},\ 0,\ r);\ r\in\mathbb{R}\}$.

20 (a) Welke van de volgende uitgebreide matrices staan al in een *reduced row echelon form*?

(b) Zeg eventueel *waarom* de matrix *(nog) niet* in een *rref* staat.

(c) Zet ze verder in de *rref* en bepaal de oplossingen van het stelsel.

(a) $$\begin{array}{ccc|c} x & y & z & \\ \hline 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

(b) $$\begin{array}{ccc|c} x & y & z & \\ \hline 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

(c) $$\begin{array}{ccc|c} x & y & z & \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

(d) $$\begin{array}{ccc|c} x & y & z & \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

(e) $$\begin{array}{ccc|c} x & y & z & \\ \hline 0 & 0 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 20 \\ 1 & 0 & 0 & 30 \end{array}$$

(f) $$\begin{array}{ccc|c} x & y & z & \\ \hline 1 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{array}$$

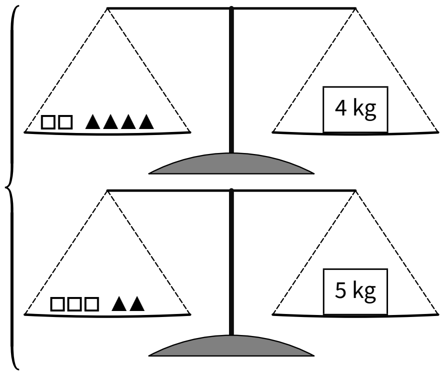
(g) $$\begin{array}{cc|c} x & y & \\ \hline 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}$$

(h) $$\begin{array}{cc|c} x & y & \\ \hline 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{array}$$

(i) $$\begin{array}{ccc|c} x & y & z & \\ \hline 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}$$

(j) $$\begin{array}{ccc|c} x & y & z & \\ \hline 1 & 0 & 0 & 13 \\ 1 & 0 & 0 & 14 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

11 De eliminatietechniek van Gauss-Jordan – voorbeeld 1



Dit is een voorbeeld van een 2 × 2 stelsel.

De twee weegschalen zijn een visuele voorstelling van een stelsel met twee vergelijkingen. De massa van de twee blokjes en vier driehoekjes is *samen* 4 kg, en de massa van de drie blokjes en twee driehoekjes is *samen* 5 kg, maar we kennen (nog) niet de massa van een blokje en van een driehoekje *apart*.

Er zijn twee *onbekenden*: de massa van een blokje (x) en de massa van een driehoekje (y).

De *bekende termen* zijn 4 en 5.

$$\begin{cases}2x+4y=4\\3x+2y=5\end{cases} \qquad \begin{array}{c}\begin{array}{ccc} x & y & \end{array}\\ \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 4 & 4\\ 3 & 2 & 5\end{array}\right]\end{array}$$

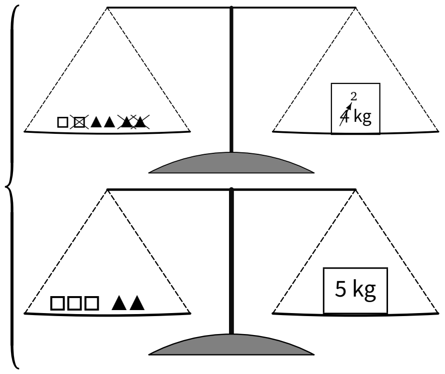
We voeren de eliminatietechniek van Gauss-Jordan uit in een aantal stappen. We vervangen bij elke stap het stelsel van vergelijkingen door een nieuw *gelijkwaardig* stelsel.

Stap 1 – vereenvoudigen

Elementaire rij-bewerking 2

Je mag steeds (beide leden van) een vergelijking vermenigvuldigen met een niet-nul getal.

Deze regel is nuttig bij het *vereenvoudigen* van vergelijkingen. Je kunt met deze regel bijvoorbeeld coëfficiënten kleiner maken, of komma's vermijden.



Als we in de bovenste weegschaal het aantal blokjes en het aantal driehoekjes halveren, dan moet ook de massa van 4 kg worden gehalveerd. De weegschaal blijft door deze handeling in evenwicht.

Dit is de toepassing van de *elementaire rij-bewerking 2*: beide leden van een vergelijking vermenigvuldigen met hetzelfde niet-nul getal (0.5).

We noteren deze bewerking met $\boxed{0.5\cdot R_1}$.

$$\begin{cases}\overset{1}{\cancel{2}}x+\overset{2}{\cancel{4}}y=\overset{2}{\cancel{4}}\\3x+2y=5\end{cases} \qquad \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 4 & 4\\ 3 & 2 & 5\end{array}\right] \quad 0.5\cdot R_1$$

Vereenvoudigen

$$\begin{cases}x+2y=2\\3x+2y=5\end{cases} \qquad \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 2\\ 3 & 2 & 5\end{array}\right]$$

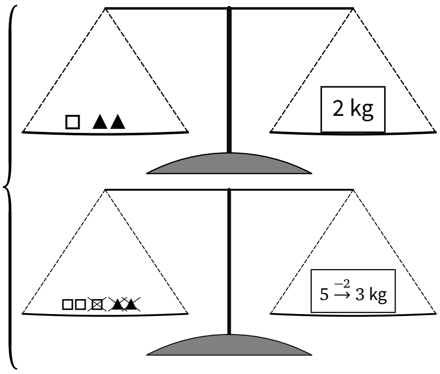
Stap 2 – nullen bijmaken

Elementaire rij-bewerking 3

Je mag steeds een vergelijking vervangen door een *niet-nul veelvoud van zichzelf* verminderd met een *veelvoud van een andere* vergelijking.

Deze elementaire rij-bewerking 3 is de bewerking die de uitgebreide matrix verder in *row echelon form* brengt.

Door de juiste veelvouden te kiezen, kun je nog meer onbekenden elimineren, en dus nog meer nullen bijmaken in de uitgebreide matrix van het stelsel.



Verminder in de onderste weegschaal beide schalen met *dezelfde massa* van de bovenste weegschaal, namelijk een blokje en twee driehoekjes, dus met 2 kg. Hierdoor blijft de weegschaal in evenwicht.

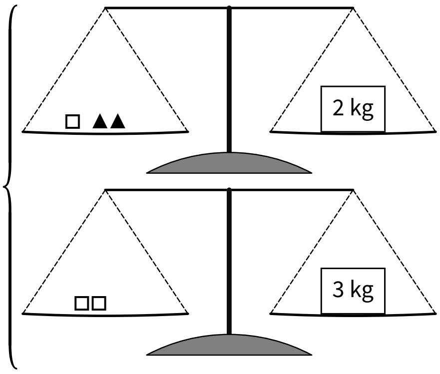
We noteren deze bewerking met $\boxed{R_2 - R_1}$. Met andere woorden: trek van de tweede vergelijking de eerste vergelijking af.

$$\begin{cases} x + 2y = 2 \\ 3x + 2y = 5 \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \textcircled{\textbf{2}} & 2 \\ 3 & \textcircled{2} & 5 \end{array}\right] \quad R_2 - R_1$$

Vervangen

$$\begin{cases} x + 2y = 2 \\ 2x = 3 \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 2 \\ 2 & \mathbf{0} & 3 \end{array}\right]$$

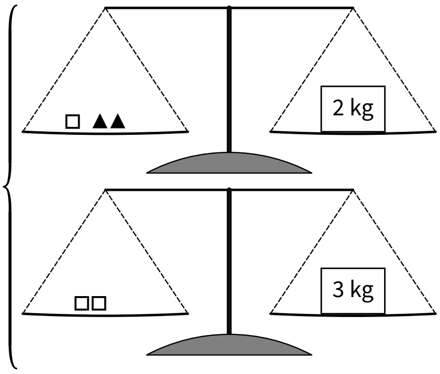
Het effect van deze bewerking is dat er *meer nullen* in de vergelijkingen komen. Het stelsel wordt dus eenvoudiger.



Het effect op de weegschalen is, dat in de linkerschaal van de onderste weegschaal *alleen blokjes* staan.

In de volgende stap zorgen we ervoor dat in de bovenste weegschaal *alleen driehoekjes* staan.

Stap 3 – nog meer nullen bijmaken



Verdubbel eerst de bovenste weegschaal. Dan liggen er twee blokjes en vier driehoekjes in de bovenste weegschaal, samen 4 kg. Verminder daarna met de massa van de onderste weegschaal, dus twee blokjes minder, samen 3 kg minder.

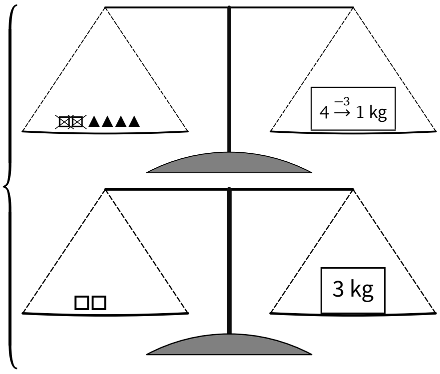
We noteren deze bewerking met $\boxed{\textcircled{\textbf{2}} \cdot R_1 - 1 \cdot R_2}$. Met andere woorden: vervang de eerste vergelijking door het dubbele van zichzelf min één keer de tweede vergelijking.

$$\begin{cases} x + 2y = 2 \\ 2x = 3 \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 2 \\ \textcircled{2} & 0 & 3 \end{array}\right] \qquad \textcircled{\textbf{2}} \cdot R_1 - 1 \cdot R_2$$

Vegen

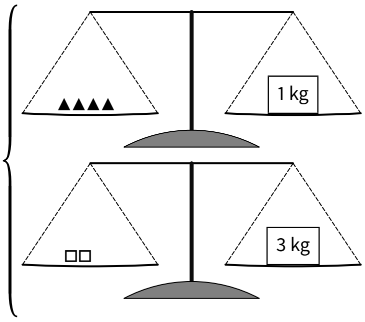
$$\begin{cases} 4y = 1 \\ 2x = 3 \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{cc|c} \mathbf{0} & 4 & 1 \\ 2 & \mathbf{0} & 3 \end{array}\right]$$

Het effect van deze bewerking is dat er *nog meer nullen* in de vergelijkingen komen. Het stelsel wordt dus eenvoudiger, en is zo goed als opgelost.



Het effect op de weegschalen is, dat in de bovenste weegschaal *alleen driehoekjes* staan.

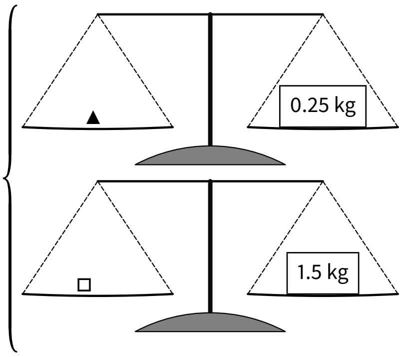
Stap 4 – vereenvoudigen



Voer twee keer de elementaire rij-bewerking 2 uit.

$$\begin{cases}4y=1\\2x=3\end{cases}\qquad \left[\begin{array}{cc|c}\mathbf{0}&4&1\\2&\mathbf{0}&3\end{array}\right]\begin{array}{l}\frac{1}{4}\cdot R1\\ \frac{1}{2}\cdot R2\end{array}$$

Vereenvoudigen



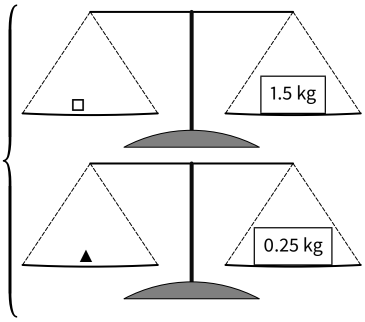
$$\begin{cases}y=0.25\\x=1.5\end{cases}\qquad \left[\begin{array}{cc|c}\mathbf{0}&1&0.25\\1&\mathbf{0}&1.5\end{array}\right]$$

Stap 5 – rijen verwisselen

Elementaire rij-bewerking 1

Je mag steeds twee of meer *rijen* van plaats *wisselen*.

Het stelsel is dan beter leesbaar. In een opgelost stelsel is het bijvoorbeeld handiger om de oplossingen te beschrijven in alfabetische volgorde van de onbekenden $x=\dots,\quad y=\dots,\quad z=\dots.$



$$\begin{cases}y=0.25\\x=1.5\end{cases}\qquad \left[\begin{array}{cc|c}\mathbf{0}&1&0.25\\1&\mathbf{0}&1.5\end{array}\right]$$

Verwisselen

$$\begin{cases}x=1.5\\y=0.25\end{cases}\qquad \left[\begin{array}{cc|c}1&\mathbf{0}&1.5\\\mathbf{0}&1&0.25\end{array}\right]$$

Besluit

Het stelsel is dus een *bepaald stelsel*. *De* oplossing is $\boxed{(1.5,\ 0.25)}$.

Dit wil zeggen: de massa van een blokje □ (x) is 1.5 kg, en de massa van een driehoekje ▲ (y) is 0.25 kg,

Samengevat

$$\begin{cases} 2x+4y=4 \\ 3x+2y=5 \end{cases} \qquad \begin{array}{c} \begin{array}{cc} x & y \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 4 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \end{array}\right] \end{array} \; \tfrac{1}{2}\cdot R_1$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & \textcircled{2} & 2 \\ 3 & \textcircled{2} & 5 \end{array}\right] \; \begin{array}{l} \\ R_2 - R_1 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} \textcircled{1} & 2 & 2 \\ \textcircled{2} & 0 & 3 \end{array}\right] \; \begin{array}{l} \textcircled{2}\cdot R_1 - \textcircled{1}\cdot R_2 \\ \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} \mathbf{0} & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{array}\right] \; \begin{array}{l} \tfrac{1}{4}R_1 \\ \tfrac{1}{2}R_2 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0.25 \\ 1 & 0 & 1.5 \end{array}\right] \; \begin{array}{l} \tfrac{1}{4} \\ \tfrac{1}{2} \end{array} \Big\updownarrow \quad \text{Verwisselen}$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cc} x & y \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1.5 \\ 0 & 1 & 0.25 \end{array}\right] \end{array} \qquad \begin{cases} x = 1.5 \\ y = 0.25 \end{cases}$$

De oplossing: $\boxed{(1.5,\ 0.25)}$.

We hebben hier gebruik gemaakt van elementaire rij-bewerkingen op de vergelijkingen van een stelsel (of de rijen van de uitgebreide matrix) die het stelsel ombouwen tot een gelijkwaardig, maar eenvoudiger stelsel.

Elementaire rij-bewerking 1

Een vergelijking verwisselen.

(Leesbaarder maken)

Elementaire rij-bewerking 2

Een vergelijking vervangen door een veelvoud van zichzelf.

(Vereenvoudigen)

Elementaire rij-bewerking 3

Een vergelijking vervangen door een *lineaire combinatie* van *zichzelf* en een *andere* vergelijking.

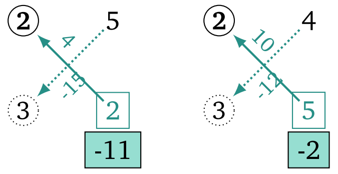
(Nullen bijmaken)

12 Eliminatie Gauss-Jordan / Spilmethode – voorbeeld 2

$$\begin{cases} 2x+5y=4 \\ 3x+2y=5 \end{cases}$$

Kies een eerste spil. Schrijf de spilrij over. Veeg de spilkolom. Vereenvoudig.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cc} x & y \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc|c} \textcircled{2} & 5 & 4 \\ \textcircled{3} & 2 & 5 \end{array}\right] \end{array} \quad \textcircled{2}\cdot R_2 - \textcircled{3}\cdot R_1$$



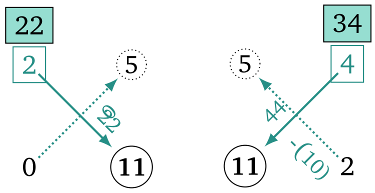
$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 5 & 4 \\ 0 & -11 & -2 \end{array}\right] \quad (-1)\cdot R_2$$

Vereenvoudigen

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 5 & 4 \\ 0 & 11 & 2 \end{array}\right]$$

Omcirkel de tweede spil (geen keuze). Schrijf de spilrij over. Veeg de spilkolom. Vereenvoudig.

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & \textcircled{5} & 4 \\ 0 & \textcircled{11} & 2 \end{array}\right] \quad \textcircled{11}\cdot R_1 - \textcircled{5}\cdot R_2$$



$$\left[\begin{array}{cc|c} 22 & 0 & 34 \\ 0 & 11 & 2 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} \frac{1}{22}R_1 \\ \frac{1}{11}R_2 \end{array}$$

Vereenvoudigen

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{34}{22} \\ 0 & 1 & \frac{2}{11} \end{array}\right]$$

De oplossing aflezen

$$\begin{cases} x = \frac{34}{22} \\ y = \frac{2}{11} \end{cases} \qquad \text{De oplossing is } \boxed{\left(\frac{34}{22}, \frac{2}{11}\right)} \approx (1.545,\ 0.1818).$$

In de eerste stap wordt de onbekende x *geëlimineerd* uit de tweede vergelijking, zodat er alleen nog de onbekende y overblijft in deze vergelijking. Je kunt deze vergelijking dus oplossen naar y, namelijk $11y = 2$ en dus $y = \frac{2}{11} \approx 0.1818$.

In de laatste stap wordt de onbekende y geëlimineerd uit de eerste vergelijking, zodat deze vergelijking kan opgelost worden naar de onbekende x, namelijk $22x = 34$ en dus $x = \frac{34}{22} \approx 1.5454$.

21

(a) Schrijf telkens de gebruikte elementaire rij-bewerkingen naast de uitgebreide matrix van het stelsel.

(b) Noteer de oplossing van het stelsel.

$$\begin{cases} 3x+5y=11 \\ x-y=1 \end{cases} \qquad \begin{array}{c} \begin{array}{cc} x & y \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc|c} \mathbf{3} & 5 & 11 \\ \mathbf{1} & -1 & 1 \end{array}\right] \end{array} \quad \ldots \qquad (1)$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cc} x & y \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 8 & 8 \\ 1 & -1 & 1 \end{array}\right] \end{array} \quad \ldots \qquad (2)$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cc} x & y \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{array}\right] \end{array} \quad \ldots \qquad (3)$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cc} x & y \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{array}\right] \end{array}$$

22

(a) Schrijf telkens de gebruikte elementaire rij-bewerkingen naast de uitgebreide matrix van het stelsel.

(b) Noteer de oplossing van het stelsel.

$$\begin{cases} 2x+3y=7 \\ 5x-4y=-40 \end{cases} \qquad \begin{array}{c} \begin{array}{cc} x & y \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc|c} \mathbf{2} & 3 & 7 \\ \mathbf{5} & -4 & -40 \end{array}\right] \end{array} \quad \ldots \qquad (1)$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cc} x & y \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 7 \\ 0 & -23 & -115 \end{array}\right] \end{array} \quad \ldots \qquad (2)$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cc} x & y \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 5 \end{array}\right] \end{array} \quad \ldots \qquad (3)$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cc} x & y \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 5 \end{array}\right] \end{array} \quad \ldots \qquad (4)$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cc} x & y \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 5 \end{array}\right] \end{array}$$

13 Eliminatie Gauss-Jordan / Spilmethode – voorbeeld 3

$$\left\{\begin{array}{l}3x+2y=5\\ 2x-y=1\end{array}\right. \qquad \begin{array}{c}\begin{array}{cc} x & y\end{array}\\ \left[\begin{array}{cc|c}\textcircled{3} & 2 & 5\\ \textcircled{2} & -1 & 1\end{array}\right]\end{array} \quad \begin{array}{c}10\\ 2\end{array} \qquad \textcircled{3}\cdot R_2-\textcircled{2}\cdot R_1$$

$$\left[\begin{array}{cc|c}3 & 2 & 5\\ 0 & -7 & -7\end{array}\right] \quad \begin{array}{cc}10 & \checkmark\\ -14 & \checkmark\end{array} \qquad \frac{1}{-7}\cdot R_2$$

$$\left[\begin{array}{cc|c}3 & \textcircled{2} & 5\\ 0 & \textcircled{1} & 1\end{array}\right] \quad \begin{array}{cc}10 & \checkmark\\ 2 & \checkmark\end{array} \qquad \textcircled{1}\cdot R_1-\textcircled{2}\cdot R_2$$

$$\left[\begin{array}{cc|c}3 & 0 & 3\\ 0 & 1 & 1\end{array}\right] \quad \begin{array}{cc}6 & \checkmark\\ 2 & \checkmark\end{array} \qquad \tfrac{1}{3}R_1$$

$$\begin{array}{c}\begin{array}{cc} x & y\end{array}\\ \left[\begin{array}{cc|c}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{array}\right]\end{array} \quad \begin{array}{cc}2 & \checkmark\\ 2 & \checkmark\end{array} \qquad \left\{\begin{array}{l}x=1\\ y=1\end{array}\right.$$

De oplossing is $\boxed{(1,\ 1)}$.

Controlegetallen

De getallen *naast* de uitgebreide matrix zijn controlegetallen .
Het *controlegetal* van een rij is de *som* van *alle* getallen van die rij. Tel dus alle coëfficiënten en de bekende term op, en je verkrijgt het controlegetal. Het is de bedoeling om het controlegetal te laten meespelen in de rij-bewerkingen en *daarna* te controleren of het controlegetal nog steeds de som is. Is dit *niet* het geval, dan is er met zekerheid een fout gemaakt in de rij waar het controlegetal staat. Zoek dan de fout tot het controlegetal oké is.

De spilmethode

De bedoeling bij elke stap is, om de juiste rij-bewerkingen uit te voeren zodat in elke vergelijking zoveel mogelijk onbekenden geëlimineerd worden. Bij elke stap is de strategie om de aandacht te richten op een welbepaalde positie in de tabel vóór de verticale streep, die de **spil** genoemd wordt, en om alle termen *boven en onder* deze spil te elimineren.

De rij waarin de spil staat, wordt de *spilrij* genoemd. De kolom waarin de spil staat, bevat na het eliminatieproces bijna allemaal nullen, op de spil na. We zeggen dat zo'n kolom *schoongeveegd* is.

Spil moet niet-nul zijn

De spil moet een *coëfficiënt* zijn *verschillend van nul*.

Liefst positieve spil

Als je nog keuze hebt, kies je best een spil die *positief* is, en *zo klein mogelijk*.

Als een matrix geveegd is met de spilmethode, kun je er steeds een *reduced row echelon form* van maken.

Voorbeeld

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & \mathbf{3} & 0 & 2 \\ \mathbf{1} & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 1 \end{array}\right] \end{array} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 0 & 0 & -1 \\ 0 & \mathbf{3} & 0 & 2 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 1 \end{array}\right] \end{array} \xrightarrow{R_1/3} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 0 & 0 & -1 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 1 \end{array}\right] \end{array}$$

14 Eliminatie Gauss-Jordan / Spilmethode – voorbeeld 4

$$\begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ 6x + 2y + z = -1 \\ -2x + 2y + z = 7 \end{cases} \qquad \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & 1 & 7 \end{array}\right] \end{array} \qquad \begin{array}{c} 5 \\ 8 \\ 8 \end{array}$$

Kies een eerste spil, en veeg de spilkolom

Bij de eerste stap kun je de spil nog kiezen uit alle coëfficiënten die niet nul zijn. We kiezen bijvoorbeeld de coëfficiënt van y in de eerste rij als spil. Omcirkel de gekozen spil. Schrijf de spilrij over. Vervang de tweede rij door een combinatie van *zichzelf* en de *spilrij* om y te elimineren. De getallen **1** en **2** zijn precies de coëfficiënten van y. Door $\mathbf{2} \cdot R_1$ *af te trekken* van $\mathbf{1} \cdot R_2$ gaat de term met y *verdwijnen* in de tweede rij. Doe hetzelfde met de derde rij, Doe dezelfde elementaire rij-bewerkingen ook met de controlegetallen. Zet een vinkje (✓) als de controle klopt.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & \textcircled{1} & 1 & 1 \\ 6 & \textcircled{2} & 1 & -1 \\ -2 & \textcircled{2} & 1 & 7 \end{array}\right] \end{array} \quad \begin{array}{c} 5 \\ 8 \\ 8 \end{array} \qquad \begin{array}{l} \\ \textcircled{1} \cdot R_2 - \textcircled{2} \cdot R_1 \\ \textcircled{1} \cdot R_3 - \textcircled{2} \cdot R_1 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & \mathbf{y} & z \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & -3 \\ -6 & 0 & -1 & 5 \end{array}\right] \end{array} \quad \begin{array}{cc} 5 & \checkmark \\ \text{-2} & \checkmark \\ \text{-2} & \checkmark \end{array}$$

Vereenvoudig eventueel

Vereenvoudig de laatste rij zodat er meer positieve coëfficiënten verschijnen.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & -3 \\ -6 & 0 & -1 & 5 \end{array}\right] \end{array} \quad \begin{array}{cc} 5 & \checkmark \\ \text{-2} & \checkmark \\ \text{-2} & \checkmark \end{array} \qquad (-1) \cdot R_3$$

Vereenvoudigen

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & -3 \\ 6 & 0 & 1 & -5 \end{array}\right] \end{array} \quad \begin{array}{cc} 5 & \checkmark \\ \text{-2} & \checkmark \\ 2 & \checkmark \end{array}$$

Kies een tweede spil, en veeg de spilkolom

Je hebt al een spil gekozen in de eerste rij. Je kunt dus een tweede spil kiezen uit de *overige* rijen: uit de tweede of de derde rij. Kies bijvoorbeeld de coëfficiënt van z in de derde rij als spil. Omcirkel de gekozen spil. Schrijf de spilrij over. Veeg de spilkolom door middel van de gepaste elementaire rij-bewerkingen. Doe dezelfde bewerkingen ook met de controlegetallen. Zet een vinkje als de controle klopt.

$$\begin{array}{ccc|c|c|c|l}
x & y & z & & & & \\
\hline
2 & 1 & \textcircled{1} & 1 & 5 & \checkmark & \textcircled{1}\cdot R_1 - \textcircled{1}\cdot R_3 \\
2 & 0 & \textcircled{-1} & -3 & \text{-2} & \checkmark & \textcircled{1}\cdot R_2 - (\textcircled{-1})\cdot R_3 \\
6 & 0 & \textcircled{1} & -5 & 2 & \checkmark &
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|c|c|c}
x & y & z & & & \\
\hline
-4 & 1 & 0 & 6 & 3 & \checkmark \\
8 & 0 & 0 & -8 & 0 & \checkmark \\
6 & 0 & 1 & -5 & 2 & \checkmark
\end{array}$$

De kolom van de onbekende z is nu schoongeveegd. De onbekende z komt slechts in één vergelijking voor. De onbekende z is nu ook *hoofdonbekende* geworden.

Vereenvoudig eventueel

Vereenvoudig de tweede rij.

$$\begin{array}{ccc|c|c|c|l}
x & y & z & & & & \\
\hline
-4 & 1 & 0 & 6 & 3 & \checkmark & \\
8 & 0 & 0 & -8 & 0 & \checkmark & \frac{1}{8}\cdot R_2 \\
6 & 0 & 1 & -5 & 2 & \checkmark &
\end{array}$$

Vereenvoudigen

$$\begin{array}{ccc|c|c|c}
x & y & z & & & \\
\hline
-4 & 1 & 0 & 6 & 3 & \checkmark \\
1 & 0 & 0 & -1 & 0 & \checkmark \\
6 & 0 & 1 & -5 & 2 & \checkmark
\end{array}$$

Kies de derde en laatste spil

De keuze van de laatste spil ligt eigenlijk vast. Je moet de laatste spil dus kiezen uit de *overblijvende* rij, namelijk de tweede rij. De laatste spil is dus de coëfficiënt van x in de tweede rij. Omcirkel de gekozen spil. Schrijf de spilrij over. Veeg de spilkolom. Doe dezelfde elementaire rij-bewerkingen met de controlegetallen. Zet een vinkje als de controle klopt.

$$\begin{array}{ccc|c|c|c|l}
x & y & z & & & & \\
\hline
\textcircled{-4} & 1 & 0 & 6 & 3 & \checkmark & \textcircled{1}\cdot R_1 - (\textcircled{-4})\cdot R_2 \\
\textcircled{1} & 0 & 0 & -1 & 0 & \checkmark & \\
\textcircled{6} & 0 & 1 & -5 & 2 & \checkmark & \textcircled{1}\cdot R_3 - \textcircled{6}\cdot R_2
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|c|c|c}
\mathbf{x} & y & z & & & \\
\hline
0 & 1 & 0 & 2 & 3 & \checkmark \\
1 & 0 & 0 & -1 & 0 & \checkmark \\
0 & 0 & 1 & 1 & 2 & \checkmark
\end{array}$$

De kolom van de onbekende x is nu schoongeveegd. De onbekende x komt slechts in één vergelijking voor. De onbekende x is nu ook *hoofdonbekende* geworden.

Vereenvoudig waar het kan, en verwissel eventueel rijen

Alle coëfficiënten zijn gelijk aan 1. Er hoeft dus niet vereenvoudigd te worden. Alle onbekenden (x, y en z) zijn hoofdonbekenden geworden. Het stelsel is dus opgelost.

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} \mathbf{x} & y & z & \end{matrix} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \end{array} \quad \left.\begin{array}{c} \\ \\ \end{array}\right\} \; \text{Verwisselen}$$

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} \mathbf{x} & y & z & \end{matrix} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \end{array} \qquad \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \\ z = 1 \end{cases}$$

De oplossing is $\boxed{(-1,\ 2,\ 1)}$.

Samengevat

$$\begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ 6x + 2y + z = -1 \\ -2x + 2y + z = 7 \end{cases} \qquad \begin{array}{c} \begin{matrix} x & y & z & \end{matrix} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & \textcircled{1} & 1 & 1 \\ 6 & \textcircled{2} & 1 & -1 \\ -2 & \textcircled{2} & 1 & 7 \end{array}\right] \end{array} \quad \begin{array}{c} 5 \\ 8 \\ 8 \end{array} \qquad \begin{array}{l} \\ \textcircled{1} \cdot R_2 - \textcircled{2} \cdot R_1 \\ \textcircled{1} \cdot R_3 - \textcircled{2} \cdot R_1 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} x & y & z & \end{matrix} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & -3 \\ -6 & 0 & -1 & 5 \end{array}\right] \end{array} \quad \begin{array}{cc} 5 & \checkmark \\ -2 & \checkmark \\ -2 & \checkmark \end{array} \qquad \begin{array}{l} \\ \\ (-1) \cdot R_3 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} x & y & z & \end{matrix} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & \textcircled{1} & 1 \\ 2 & 0 & \textcircled{-1} & -3 \\ 6 & 0 & \textcircled{1} & -5 \end{array}\right] \end{array} \quad \begin{array}{cc} 5 & \checkmark \\ -2 & \checkmark \\ 2 & \checkmark \end{array} \qquad \begin{array}{l} \textcircled{1} \cdot R_1 - \textcircled{1} \cdot R_3 \\ \textcircled{1} \cdot R_2 - (\textcircled{-1}) \cdot R_3 \\ \\ \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} x & y & z & \end{matrix} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} -4 & 1 & 0 & 6 \\ 8 & 0 & 0 & -8 \\ 6 & 0 & 1 & -5 \end{array}\right] \end{array} \quad \begin{array}{cc} 3 & \checkmark \\ 0 & \checkmark \\ 2 & \checkmark \end{array} \qquad \begin{array}{l} \\ \frac{1}{8} \cdot R_2 \\ \\ \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} x & y & z & \end{matrix} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} \textcircled{-4} & 1 & 0 & 6 \\ \textcircled{1} & 0 & 0 & -1 \\ \textcircled{6} & 0 & 1 & -5 \end{array}\right] \end{array} \quad \begin{array}{cc} 3 & \checkmark \\ 0 & \checkmark \\ 2 & \checkmark \end{array} \qquad \begin{array}{l} \textcircled{1} \cdot R_1 - (\textcircled{-4}) \cdot R_2 \\ \\ \textcircled{1} \cdot R_3 - \textcircled{6} \cdot R_2 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} x & y & z & \end{matrix} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \end{array} \quad \begin{array}{cc} 3 & \checkmark \\ 0 & \checkmark \\ 2 & \checkmark \end{array} \qquad \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \\ z = 1 \end{cases}$$

De oplossing is $\boxed{(-1,\ 2,\ 1)}$.

15 Eliminatie Gauss-Jordan / Spilmethode – voorbeeld 5

$$\begin{cases} x+y+2z=8 \\ 3z=x+2y+1 \\ 3x+4z=7y+10 \end{cases}$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} \textcircled{1} & 1 & 2 & 8 \\ \textcircled{-1} & -2 & 3 & 1 \\ \textcircled{3} & -7 & 4 & 10 \end{array}\right] \end{array} \quad \begin{array}{c} 12 \\ 1 \\ 10 \end{array} \quad \begin{array}{l} \\ \textcircled{1}\cdot R_2-(\textcircled{-1})\cdot R_1 \\ \textcircled{1}\cdot R_3-\textcircled{3}\cdot R_1 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & -1 & 5 & 9 \\ 0 & -10 & -2 & -14 \end{array}\right] \end{array} \quad \begin{array}{c} 12 \\ 13 \\ \text{-26} \end{array} \quad \begin{array}{c} \checkmark \\ \checkmark \\ \checkmark \end{array} \quad \begin{array}{l} \\ -R_2 \\ -R_3 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \textcircled{1} & 2 & 8 \\ 0 & \textcircled{1} & -5 & -9 \\ 0 & \textcircled{10} & 2 & 14 \end{array}\right] \end{array} \quad \begin{array}{c} 12 \\ \text{-13} \\ 26 \end{array} \quad \begin{array}{c} \checkmark \\ \checkmark \\ \checkmark \end{array} \quad \begin{array}{l} \textcircled{1}\cdot R_1-\textcircled{1}\cdot R_2 \\ \\ \textcircled{1}\cdot R_3-\textcircled{10}\cdot R_2 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 7 & 17 \\ 0 & 1 & -5 & -9 \\ 0 & 0 & 52 & 104 \end{array}\right] \end{array} \quad \begin{array}{c} 25 \\ \text{-13} \\ 156 \end{array} \quad \begin{array}{c} \checkmark \\ \checkmark \\ \checkmark \end{array} \quad \begin{array}{l} \\ \\ \frac{1}{52}R_3 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \textcircled{7} & 17 \\ 0 & 1 & \textcircled{-5} & -9 \\ 0 & 0 & \textcircled{1} & 2 \end{array}\right] \end{array} \quad \begin{array}{c} 25 \\ \text{-13} \\ 3 \end{array} \quad \begin{array}{c} \checkmark \\ \checkmark \\ \checkmark \end{array} \quad \begin{array}{l} \textcircled{1}\cdot R_1-\textcircled{7}\cdot R_2 \\ \textcircled{1}\cdot R_2-(\textcircled{-5})\cdot R_3 \\ \\ \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \end{array} \quad \begin{array}{c} 4 \\ 2 \\ 3 \end{array} \quad \begin{array}{c} \checkmark \\ \checkmark \\ \checkmark \end{array} \qquad \begin{cases} x=3 \\ y=1 \\ z=2 \end{cases}$$

De oplossing is $\boxed{(3,\ 1,\ 2)}$.

16 Eliminatie Gauss-Jordan / Spilmethode – voorbeeld 6

$$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ -x + 2y - z = 0 \\ -y + z = 1 \end{cases}$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & \textcircled{0} & 0 \\ -1 & 2 & \textcircled{-1} & 0 \\ 0 & -1 & \textcircled{\mathbf{1}} & 1 \end{array}\right] \end{array} \quad \begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 1 \end{array}$$

Deze rij bevat al een nul in de spilkolom.

$\textcircled{\mathbf{1}} \cdot R_2 - (\textcircled{-1}) \cdot R_3$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} \textcircled{\mathbf{2}} & -1 & 0 & 0 \\ \textcircled{-1} & 1 & 0 & 1 \\ \textcircled{0} & -1 & 1 & 1 \end{array}\right] \end{array} \quad \begin{array}{cc} 1 & \checkmark \\ 1 & \checkmark \\ 1 & \checkmark \end{array}$$

$\textcircled{\mathbf{2}} \cdot R_2 - (\textcircled{-1}) \cdot R_1$

Reeds geveegd.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & \textcircled{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \textcircled{\mathbf{1}} & 0 & 2 \\ 0 & \textcircled{-1} & 1 & 1 \end{array}\right] \end{array} \quad \begin{array}{cc} 1 & \checkmark \\ 3 & \checkmark \\ 1 & \checkmark \end{array}$$

$\textcircled{\mathbf{1}} \cdot R_1 - (\textcircled{-1}) \cdot R_2$

$\textcircled{\mathbf{1}} \cdot R_3 - (\textcircled{-1}) \cdot R_2$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \end{array} \quad \begin{array}{cc} 4 & \checkmark \\ 3 & \checkmark \\ 4 & \checkmark \end{array}$$

$\frac{1}{2} \cdot R_1$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \end{array} \quad \begin{array}{cc} 2 & \checkmark \\ 3 & \checkmark \\ 4 & \checkmark \end{array}$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases}$$

De oplossing is $\boxed{(1,\ 2,\ 3)}$.

17 Eliminatie Gauss-Jordan / Spilmethode – voorbeeld 7

$$\begin{cases} 100+w=x+z \\ y+z=75+w \\ x=25+y \end{cases}$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc|c} x & y & z & w & \\ \textcircled{1} & 0 & 1 & -1 & 100 \\ \textcircled{0} & 1 & 1 & -1 & 75 \\ \textcircled{1} & -1 & 0 & 0 & 25 \end{array} \end{array} \quad \begin{array}{c} 101 \\ 76 \\ 25 \end{array}$$

Deze rij behouden, niets te vegen.

$\textcircled{1} \cdot R_3 - \textcircled{1} \cdot R_1$

$$\begin{array}{cccc|c} x & y & z & w & \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 100 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 75 \\ \cancel{0} & \cancel{-1} & \cancel{-1} & \cancel{1} & \cancel{-75} \end{array} \quad \begin{array}{cc} 101 & \checkmark \\ 76 & \checkmark \\ -76 & \checkmark \end{array}$$

$$\begin{cases} x=100-z+w \\ y=75-z+w \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=100-r+s \\ y=75-r+s \\ z=\text{Vrij te kiezen, zeg } r\in\mathbb{R} \\ w=\text{Vrij te kiezen, zeg } s\in\mathbb{R} \end{cases}$$

De oplossingenverzameling is $\boxed{\{\,(100-r+s,\ 75-r+s,\ r,\ s);\ r,s\in\mathbb{R}\}}$.

Dit stelsel is *tweevoudig onbepaald*.

23 Los de volgende stelsels op met de spilmethode (met pen en papier).

(a) $\begin{cases} x+y+2z=8 \\ -x-2y+3z=1 \\ 3x-7y+4z=10 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} 3x+4y+1=0 \\ x-3y-4=0 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} 3x-4y=11 \\ 5x-2y+5=0 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} 4x=y \\ 4y=5+6x \end{cases}$

(e) $\begin{cases} 2x+3y=1 \\ 5y=x \end{cases}$

(f) $\begin{cases} 2x+3y=3+z \\ 3x+2y+z=5 \\ 4x+z=3+y \end{cases}$

(g) $\begin{cases} 4x+2y+1=3z \\ x+2y+z=1 \\ 7x+8y+z=2 \end{cases}$

(h) $\begin{cases} x+y=3+z \\ 3x+z=4+2y \\ 6x+y=13+z \end{cases}$

(i) $\begin{cases} x+y=10 \\ x-y=5 \\ x+y+z=35 \\ 2x+4y+z=50 \end{cases}$

(j) $\begin{cases} 2x+3y=z-5 \\ x+y=8 \\ x=-z \end{cases}$

24 Leid uit elke gegeven gereduceerde vorm de oplossing(en) van het stelsel af.

(a) $$\left[\begin{array}{ccc|c} x & y & z & \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

(b) $$\left[\begin{array}{ccc|c} x & y & z & \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right]$$

(c) $$\left[\begin{array}{ccc|c} x & y & z & \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{array}\right]$$

(d) $$\left[\begin{array}{ccc|c} x & y & z & \\ 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right]$$

(e) $$\left[\begin{array}{ccc|c} x & y & z & \\ 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

(f) $$\left[\begin{array}{ccc|c} x & y & z & \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

25 Los de volgende stelsels op met de spilmethode.

(Gebruik pen en papier. Controleer achteraf met de grafische rekenmachine.)

(a) $$\begin{cases} 2x + y - z = 3 \\ x + 3y + z = 2 \\ 2x - y + z = 5 \end{cases}$$

(b) $$\begin{cases} 2x - 3y + z = 10 \\ 4x + y + 3z = 7 \\ 3x - y + 2z = 9 \end{cases}$$

(c) $$\begin{cases} 2x + 3y - 4z = 0 \\ 4x + 7y - z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

(d) $$\begin{cases} 3x - y + 4z = 0 \\ 2x + y - 3z = 5 \\ x + 3y - 10z = 10 \end{cases}$$

(e) $$\begin{cases} -x + 3y + z = -1 \\ x + 3y + 2z = 5 \\ x + 9y + 5z = 8 \end{cases}$$

(f) $$\begin{cases} 10x - 3y + 6z = 0 \\ 3x + 4y - z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$$

(g) $$\begin{cases} -3x + y - 4z = 1 \\ x - y + z = 5 \\ 8x - 2y + 11z = 8 \end{cases}$$

(h) $$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y + z = 3 \\ x + y - z = 2 \end{cases}$$

26 Bekijk de volgende *drie* stelsels waarbij de coëfficiënten dezelfde zijn voor elk stelsel, maar de bekende termen (rechterleden) verschillend zijn.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr|c|c} 4x & - & 8y & + & 5z & = & 1 & 0 & 0 \\ 4x & - & 7y & + & 4z & = & 0 & 1 & 0 \\ 3x & - & 4y & + & 2z & = & 0 & 0 & 1 \end{array}\right.$$

Los de volgende drie de stelsels *tegelijk* op met de spilmethode met de uitgebreide matrix.

$$\left[\begin{array}{ccc|c|c|c} x & y & z & & & \\ 4 & -8 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -7 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -4 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

27 Wat verstaat men onder de coëfficiënten van een stelsel?

Hoe heten de getallen *achter* de verticale streep in de uitgebreide matrix?

18 Samenvatting

Er zijn slechts drie soorten stelsels van m eerstegraadsvergelijkingen in n onbekenden:

Bepaald stelsel

Zo'n stelsel heeft een *unieke* oplossing. Er is een en slechts stel waarden voor de onbekenden $x, y, \dots$ die gelijktijdig aan alle vergelijkingen voldoen.

De gereduceerde trapvorm van een bepaald stelsel eindigt altijd met een *vierkant* stelsel waarbij de hoofdelementen op de *hoofddiagonaal* staan. Bijvoorbeeld,

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x & y & z & \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 0 & 0 & 2 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & -3 \end{array}\right] \end{array}.$$

De oplossing is $\boxed{(2,\ 0,\ -3)}$.

Onbepaald stelsel

Het stelsel heeft *oneindig veel oplossingen*.

De gereduceerde trapvorm van een bepaald stelsel eindigt altijd met een stelsel waarbij er *minder* vergelijkingen zijn dan *onbekenden*, de eventuele nulrijen niet meegerekend, deze kun je schrappen.

Zoveel vergelijkingen er *tekort* zijn, zoveel keer onbepaald is het stelsel. Bijvoorbeeld een *enkelvoudig onbepaald* stelsel

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x & y & z & \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 0 & 3 & 4 \\ 0 & \mathbf{1} & 2 & -1 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{array}\right] \end{array}.$$

Noteer het stelsel *voluit* en los op naar de *hoofdonbekenden*:

$$\begin{cases} \mathbf{x} = -3z + 4 \\ \mathbf{y} = -2z - 1. \end{cases}$$

De *oplossingenverzameling* $\boxed{\{(-3r + 4,\ 2r - 1,\ r); r \in \mathbb{R}\}}$.

Vals stelsel

Er is geen oplossing, geen enkel stel waarden voor de onbekenden $x, y, \dots$ voldoen gelijktijdig an alle vergelijkingen.

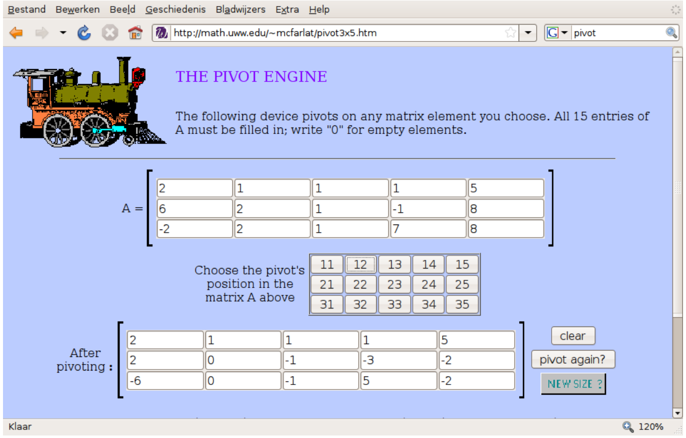
De gereduceerde vorm eindigt altijd op een typische rij waarbij alle coëfficiënten gelijk zijn aan *nul* én de bekende term *verschillend is van nul*. Bijvoorbeeld,

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x & y & z & \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 1 \end{array}\right] \end{array}.$$

Onwaar

19 De spilmethode online

Je kunt de spilmethode *online* uitvoeren met de *Pivot Engine*-applet. Een *applet* is een programmaatje binnen een website. Je kunt er meestal interactief mee werken. Zie figuur 2. Je hoeft zelf geen berekeningen uit te voeren. Bij elke stap wijs je een spil aan en het applet doet de berekeningen voor jou. Je kunt deze applet gebruiken als controlemiddel bij de oefeningen, bijvoorbeeld om een hardnekkige fout op te sporen.



THE PIVOT ENGINE

The following device pivots on any matrix element you choose. All 15 entries of A must be filled in; write "0" for empty elements.

A =

2	1	1	1	5
6	2	1	-1	8
-2	2	1	7	8

Choose the pivot's position in the matrix A above

11	12	13	14	15
21	22	23	24	25
31	32	33	34	35

After pivoting :

2	1	1	1	5
2	0	-1	-3	-2
-6	0	-1	5	-2

Figuur 2 – De spilmethode online `http://math.uww.edu/~mcfarlat/pivot.htm`

Je ziet in figuur 2 een demonstratie. Ik heb hier de uitgebreide matrix uit het volgende voorbeeld gebruikt én ook een extra kolom ingevuld met de controlegetallen. Kies dus voor een 3 × 5 matrix.

$$\begin{cases} 2x+y+z=1 \\ 6x+2y+z=-1 \\ -2x+2y+z=7 \end{cases} \qquad \begin{array}{ccc|c|c} x & y & z & & \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 6 & 2 & 1 & -1 & 8 \\ -2 & 2 & 1 & 7 & 8 \end{array}$$

Een andere *Pivot engine* (figuur 3) geeft *direct* een gereduceerde trapvorm.

Previte's Pivot Engine

Puts a matrix in reduced row echelon form

Directions: Enter the matrix, then click on "Reduce".

All inputs must be in DECIMAL (no fractions).

-- New Improved!! Less roundoff error!!

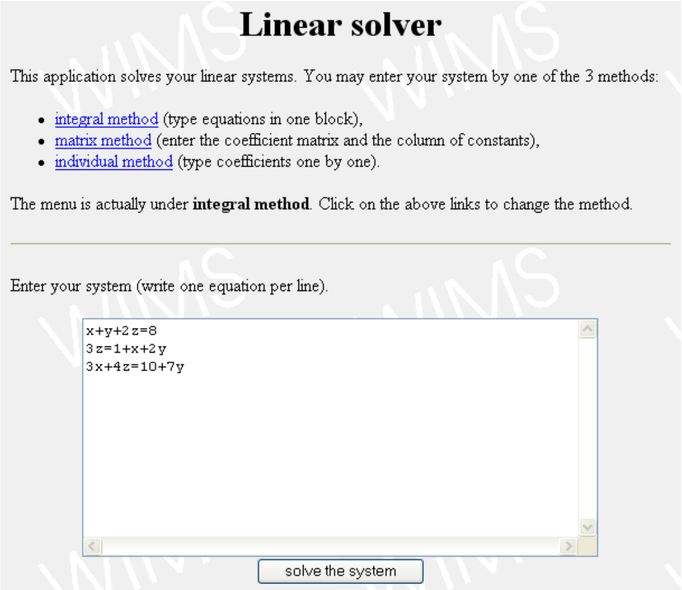
2	1	1	1
6	2	1	-1
-2	2	1	7

Figuur 3 – Direct de gereduceerde vorm online `http://math.bd.psu.edu/~jpp4/finitemath/pivot.html`

REDUCE MATRIX geeft de gereduceerde vorm, RESTORE MATRIX toont terug de oorspronkelijke matrix en Reset maakt de matrix leeg.

20 Stelsels online oplossen

Op het internet vind je vele hulpmiddelen zoals de *Linear Solver* (figuur (4) om stelsels in te voeren en te laten oplossen.



Linear solver

This application solves your linear systems. You may enter your system by one of the 3 methods:

- integral method (type equations in one block),
- matrix method (enter the coefficient matrix and the column of constants),
- individual method (type coefficients one by one).

The menu is actually under **integral method**. Click on the above links to change the method.

Enter your system (write one equation per line).

```
x+y+2z=8
3z=1+x+2y
3x+4z=10+7y
```

Figuur 4 – Stelsels oplossen online http://wims.unice.fr/wims/en_tool~linear~linsolver.html

In figuur 4 zie je een demonstratie.
solve the system geeft direct de oplossing(en) van het stelsel.

21 Stelsels oplossen met de grafische rekenmachine

Voorbeeld,

$$\begin{cases} x+y+2z=8 \\ 3z=x+2y+1 \\ 3x+4z=7y+10 \end{cases} \qquad \begin{array}{ccc|c} x & y & z & \\ 1 & 1 & 2 & 8 \\ -1 & -2 & 3 & 1 \\ 3 & -7 & 4 & 10 \end{array} \xrightarrow{\text{rref}} \begin{array}{ccc|c} x & y & z & \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}$$

De grafische rekenmachine toont niet de verticale streep van de uitgebreide matrix. Die moet je er zelf bij denken!

Voer eerst de matrix in met matrix `edit [A]`.

Bereken de *reduced row echelon form* (gereduceerde trapvorm) met matrix `math rref(`.

Kies de matrix **A** met matrix `names [A]`.

```
rref([A])
```

De oplossing is dus $\boxed{(3,\ 1,\ 2)}$.

22 Toepassingen met stelsels

28

	Tafel 1	Tafel 2	Tafel 3
Water	3	0	5
Broodje	2	4	0
Thee	1	5	2
Totaal (euro)	8.20	16.40	9.00

Gisteren zat ik op een terrasje in Tienen en keek naar de omringende tafeltjes. Ik noteerde wat de mensen bestelden en hoeveel ze in totaal moesten betalen.

(a) Stel een gepast stelsel op,

(b) en bereken de eenheidsprijzen met behulp van de grafische rekenmachine.

29 Zoek twee getallen waarvan de som gelijk is aan 10 en het verschil ook gelijk is aan 10.

30 Zoek vier getallen zodat de som van deze vier getallen gelijk is aan 100, en zodat het eerste getal het dubbele is van het tweede, het tweede het dubbele is van het derde, en het derde het dubbele is van het vierde.

(Noem de vier getallen a (het grootste), b, c en d.)

31

	Tafel 4	Tafel 5	Tafel 6
Water	4	7	4
Broodje	0	0	0
Thee	1	1	0
Totaal (euro)	6.00	10.00	4.00

Op hetzelfde terrasje in Tienen liggen drie kassatickets.

(a) Stel een gepast stelsel op,

(b) en bereken de eenheidsprijzen met behulp van de grafische rekenmachine.

32 Vier kinderen in een huisgezin verschillen telkens twee jaar in leeftijd en zijn samen 36 jaar. Hoe oud zijn deze kinderen?

33 Op een controlepost tijdens *De Gordel* ziet een fietsenmaker alle banden na.

Van een groepje gordelaars heeft hij in totaal 67 wielen gecontroleerd.

Bij dit groepje waren er evenveel fietsers als voetgangers (duwers van buggy's inbegrepen, rolstoelgebruikers en baby's niet inbegrepen).

Er waren tien fietsers meer dan buggy's.

Hij controleerde of de zeven baby's hun gordel wel goed aan hadden.

Op deze *Gordel* werden moderne eenpersoonsbuggy's gebruikt met drie wielen en een verplichte gordel.

Op alle fietsen zat telkens één persoon, alle rolstoelen (met vier wielen) werden bestuurd door de inzittende.

Hoeveel fietsers, baby's, rolstoelgebruikers en voetgangers bevonden zich in dit groepje?

(Noem f het aantal fietsers, b het aantal baby's, r het aantal rolstoelgebruikers en v het totaal aantal voetgangers (duwers van buggy's inbegrepen).)

34 Reclame in de groentehal:

2 kg appelsienen, 1 kg bananen en 3 citroenen voor 5 euro.

Twee trouwe klanten krijgen tegen dezelfde gunstprijzen respectievelijk 3 kg appelsienen, 2 kg bananen en 1 citroen voor 8 euro,

en 4 kg appelsienen, 1 kg bananen en 2 citroenen voor 7.35 euro. Bepaal de eenheidsprijzen.

35 Bij de warme bakker betaal je voor 15 sandwiches, 4 koffiekoeken en een bruin brood 6.50 euro. Voor 10 sandwiches, 6 koffiekoeken en een bruin brood rekent men 25 cent minder. Bestel je 5 sandwiches, 10 koffiekoeken en twee bruine broden, dan vraagt men 7.75 euro.

Bepaal de eenheidsprijzen.

36 De familie Flodder wil tuinverlichting installeren. De architect geeft drie voorstellen:

- Drie verlichtingspaaltjes langs de oprit, een wandtoestel met spaarlamp aan de voordeur en twee stralers aan de kant van de garage. Dit alles voor een bedrag van 1756.55 euro.
- Plaatst men vier verlichtingspaaltjes, een wandtoestel met spaarlamp, dan is één straler voldoende, maar loopt de prijs op tot 2156.60 euro.
- Een goede verlichting wordt ook bekomen met drie verlichtingspaaltjes, twee wandtoestellen met spaarlamp en één straler voor een bedrag van 2054.95 euro.

Bepaal de prijs van de drie soorten verlichtingstoestellen.

37 In de kaaswinkel kost 200 g geitenkaas, 150 brie en 250 g jonge Hollandse kaas 11.85 euro. Bestel je 150 g geitenkaas, 200 g brie en 200 g jonge Hollandse kaas, dan betaal je 10.65 euro. Voor 130 g geitenkaas, 180 g brie en 240 g jonge Hollandse kaas vraagt men 10.35 euro.

Bereken de prijs per kilogram van deze drie kaassoorten.

38 De som van drie getallen is 200. Een van de getallen is 2 minder dan de som van de twee andere. Dit getal is tevens 1 meer dan het dubbel van het verschil van de twee andere getallen.

Over welke getallen gaat het?

39 Bepaal een vergelijking $y = ax^2 + bx + c$ van de kromme die door de punten

(3, 0), (1, 2) en (-1, 4) gaat.

Plot de kromme om de oplossing te controleren.

40 Bepaal een vergelijking $y = ax^2 + bx + c$ van de parabool die door de punten

(2, 0), (-1, 1) en (3, -1) gaat.

Plot de parabool om de oplossing te controleren.

41 Bepaal een vergelijking $y = ax^2 + bx + c$ van de parabool die door de punten

(1, 1), (2, 2) en (4, -1) gaat.

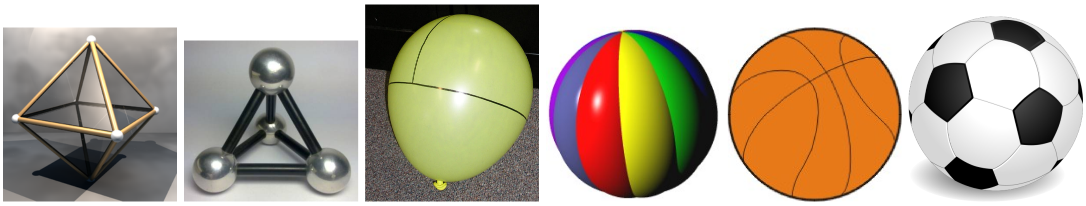
Plot de parabool om de oplossing te controleren.

42 De vergelijkingen $y = 3x + 5$, $y = -2x + 7$ en $y = 6.4$ bepalen telkens een rechte in het xy-vlak. Gaan deze rechten door eenzelfde punt? Bepaal eventueel dit punt.

Plot de drie rechten om de oplossing te controleren.

De formule van Euler voor veelvlakken

43 Bekijk eens enkele *bolle* (zonder gaten) ruimtefiguren die bestaan uit veelhoeken.



Figuur	f	v	e
Octaëder			
Tetraëder			
Ballon			
Strandbal			
Basketbal			
Voetbal			

Tel telkens het *aantal zijvlakken* f (faces), het *aantal hoekpunten* v (vertices), en het *aantal ribben* e (edges). Noteer de resultaten in de tabel.

Zie je een verband tussen f, v en e?

Dit verband staat bekend onder de naam *Formule van Euler voor veelvlakken*. ☐

Vraag

Bestaat er een bolle ruimtefiguur waarvan de zijvlakken *vierhoeken* zijn zodat in elk hoekpunt *drie ribben* samenkomen?

We kunnen dit probleem vertalen in een stelsel van eerstegraadsvergelijkingen in drie onbekenden f, v en e.

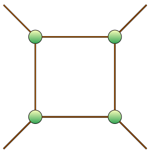
Formule van Euler voor veelvlakken

Een eerste vergelijking wordt gegeven door de formule van Euler voor veelvlakken.

$$f+v=e+2 \tag{1}$$

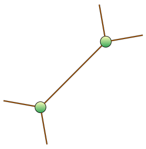
Elk zijvlak heeft vier ribben, dit geeft $4\cdot f$ ribben, maar elke ribbe grenst aan twee zijvlakken en telt dus dubbel. Dit geeft de tweede vergelijking

$$2e=4f. \tag{2}$$



In elk hoekpunt komen drie ribben samen, dit geeft $3v$ ribben, maar elke ribbe verbindt twee hoekpunten en telt dus dubbel. Dit geeft de derde vergelijking

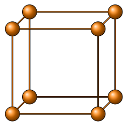
$$2e=3v. \tag{3}$$



$$\begin{cases} f+v=e+2\\ 4f=2e\\ 3v=2e\end{cases} \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} f & v & e & \\ 1 & 1 & -1 & 2\\ 4 & 0 & -2 & 0\\ 0 & 3 & -2 & 0\end{array}\right] \xrightarrow{\text{rref}} \boxed{\begin{cases} f=6\\ v=8\\ e=12\end{cases}}$$

Antwoord

De enige bolle ruimtefiguur waarvan de zijvlakken *vierhoeken* zijn zodat in elk hoekpunt *drie ribben* samenkomen is een *zesvlak* (kubus, balk, parallellepipedum, ..).



44 Los dit stelsel op en beschrijf de bijbehorende ruimtefiguur.

$$\begin{cases} f+v=e+2 \\ 2e=3f \\ 2e=4v \end{cases}$$

45 Bestaat er een bolle ruimtefiguur waarvan de zijvlakken *vierhoeken* zijn zodat in elk hoekpunt *vier ribben* samenkomen?

Noteer het stelsel dat bij dit probleem hoort. Los dit stelsel op en beschrijf de bijbehorende ruimtefiguur.

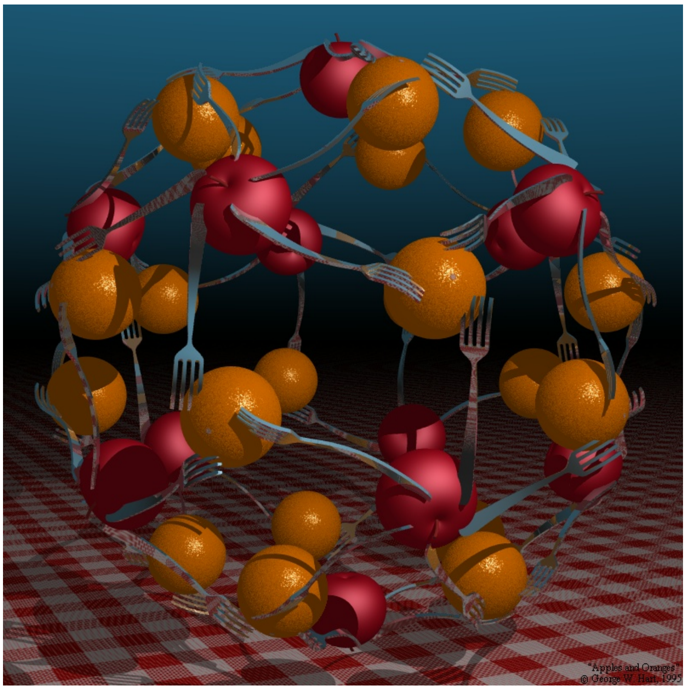
46 Bestaat er een bolle ruimtefiguur waarvan de zijvlakken *driehoeken* zijn zodat in elk hoekpunt *vijf ribben* samenkomen?

Noteer het stelsel dat bij dit probleem hoort. Los dit stelsel op en beschrijf de bijbehorende ruimtefiguur.

47 Bestaat er een bolle ruimtefiguur waarvan de zijvlakken *vijfhoeken* zijn zodat in elk hoekpunt *drie ribben* samenkomen?

Noteer het stelsel dat bij dit probleem hoort. Los dit stelsel op en beschrijf de bijbehorende ruimtefiguur.

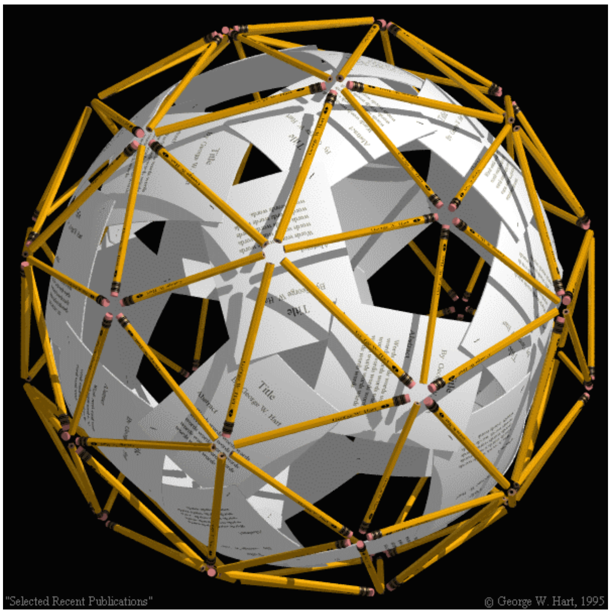
48 Gebruik de onbekenden f (aantal vierhoekige zijvlakken), v (totaal aantal vruchten), e (aantal vorken), v_a (aantal appels), v_s (aantal sinaasappelen).



Figuur 5 – Maak het boodschappenlijstje om deze ruimtefiguur te kunnen construeren.

Apples and Oranges
`http://www.georgehart.com/Applorng.html`

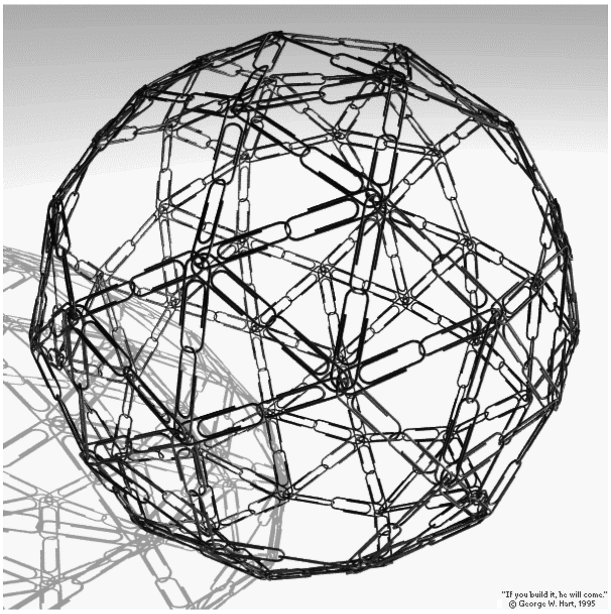
49 Gebruik de onbekenden f (aantal driehoekige zijvlakken), v (totaal aantal hoekpunten, waar potloden samenkomen). e (aantal potloden), v_5 (aantal hoekpunten, waar vijf potloden samenkomen), v_6 (aantal hoekpunten, waar zes potloden samenkomen).



Figuur 6 – Stel een gepast stelsel op om deze vijf onbekenden te vinden.

Selected Recent Papers
`http://www.georgehart.com/Papers.html`

50 Gebruik de onbekenden f (totaal aantal zijvlakken), v (aantal hoekpunten), e (aantal ribben), f_3 (aantal driehoekige zijvlakken), f_5 (aantal vijfhoekige zijvlakken),



Figuur 7 – Hoeveel paperclips zitten er in dit model?

If you build it, he will come
`http://www.georgehart.com/iybihwc.html`

51 Een kunstsmid moet een ijzeren veelvlak vervaardigen opgebouwd uit *vierhoeken*. Er zijn zeven hoekpunten waar vier ribben samenkomen. In de overige hoekpunten komen drie ribben samen. Hoe ziet dat veelvlak er uit?

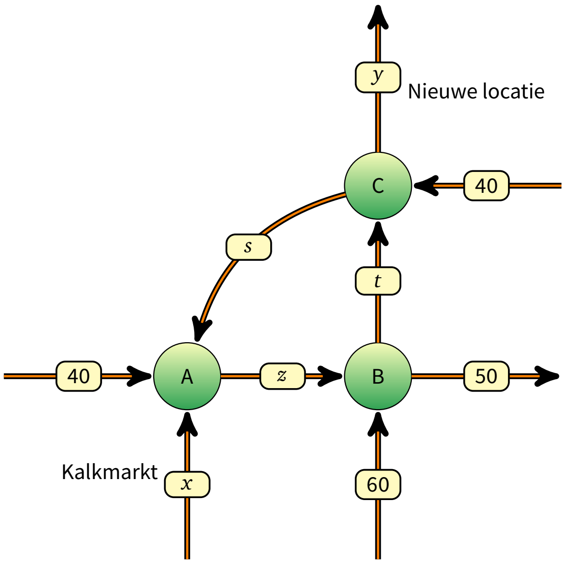
52

Kun je nu ook het aantal ribben, zeshoekige zijvlakken en vijfhoekige zijvlakken berekenen in een voetbal?

Gebruik de onbekenden f (totaal aantal zijvlakken), e (aantal ribben), v (totaal aantal hoekpunten). f_6 (aantal zeshoeken), en f_5 (aantal vijfhoeken).

53 Zie je een gelijkenis tussen een ‘voetbal’ en ‘Apples and Oranges’ (figuur 5 op pagina 45)?

54



Je hebt een kledingzaak op de Kalkmarkt. Je hebt echter een leeg pand opgemerkt in een ander deel van de stad, en je overweegt om te verhuizen naar deze nieuwe locatie omdat je *vermoedt* dat het daar drukker is.

Pijlen: richting waarin de klanten zich voortbewegen.

Omcirkelde getallen: het aantal klanten per minuut tijdens de openingstijden.

De vraag is nu:

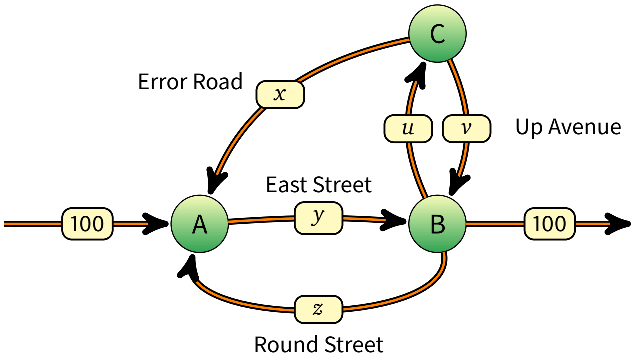
> Komen er *meer* klanten voorbij de nieuwe locatie dan voorbij de oude locatie? Met andere woorden, is het de moeite om de winkel te verhuizen?

(a) Noteer het stelsel van *drie* vergelijkingen voor *vijf* onbekenden.

(b) Los het stelsel op. Dit stelsel is tweevoudig onbepaald.

(c) Je kunt dus niet de aantallen x, y, z, s en t *afzonderlijk* bepalen. Maar je kunt wél de vraag beantwoorden! Met andere woorden: je kunt het verschil $y - x$ berekenen!

55



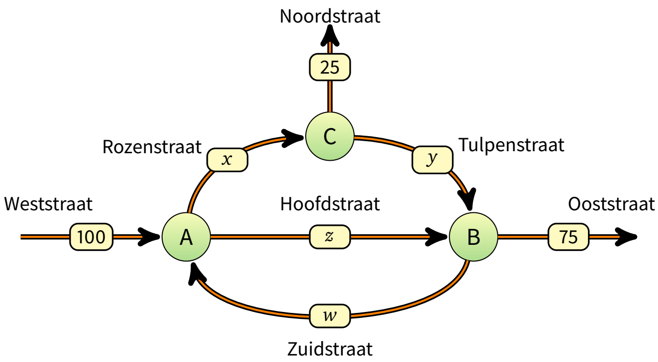
In een poging om de verkeersstromen te meten in de buurt van Ellipse Park, hebben verkeersdeskundigen op twee plaatsen in Eastbound Street tellers geplaatst. Deze tellers hebben 100 auto’s per uur geregistreerd op beide plaatsen.

(a) Noteer het stelsel van *drie* vergelijkingen voor *vijf* onbekenden.

(b) Los het stelsel op.

(c) In welk deel van de Up Avenue rijden er *meer* auto’s, in de zuidelijke richting of in de noordelijke richting?

56



Dit is een netwerk van eenrichtingsverkeer. De getallen in de rechthoekjes stellen het aantal auto's per uur voor.

(a) Noteer het stelsel van *drie* vergelijkingen voor *vier* onbekenden.

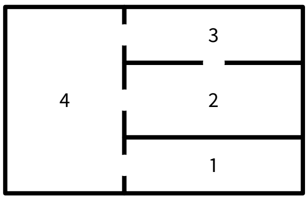
(b) Los het stelsel op.

(c) Als er geen verkeer is in de Hoofdstraat, wat is dan het laagst mogelijke verkeersdrukte in de Rozenstraat?

(d) Als er 50 auto's per uur rijden in de Zuidstraat, wat is dan de hoogst mogelijke verkeersdrukte in de Hoofdstraat?

(e) Kunnen er 100 auto's per uur rijden in de Zuidstraat?

57



Er zitten honderd insecten in een gesloten ruimte met vier kamers, onderling verbonden met doorgangen.
De insecten kruipen een beetje rond en na een minuut zijn sommigen ofwel nog altijd in dezelfde kamer ofwel naar een *naburige* kamer gekropen.

Veronderstel dat in elke kamer 40 % van de insecten blijft zitten in de kamer waar ze aanvankelijk zaten, en dat de rest naar een naburige kamer kruipt.

De insecten die op bezoek gaan naar een andere kamer verdelen zich in *even grote* groepen naar de naburige kamers. Bijvoorbeeld, vanuit kamer 3 gaat de helft van de verhuizers naar kamer 2 en de andere helft van de verhuizers naar kamer 4. Nog een voorbeeld: vanuit kamer 4 verdelen de verhuizende insecten zich in *drie* even grote groepjes naar kamer 1, kamer 2 en kamer 3.

(a)

Kamer	Aantal insecten
1	20
2	20
3	20
4	40

Stel, dit is de bezetting van de kamers in het begin.

Wat is dan de verdeling op het einde van een minuut?

(b)

Kamer	Aantal insecten
1	12
2	25
3	26
4	37

Stel, dit is de bezetting van de kamers na een minuut.

Bepaal de *aanvankelijke* verdeling van de insecten over de vier kamers.

(c) De uitgebreide matrix van de 'verhuizingsmatrix' heeft een speciale eigenschap. Welke? Hoe komt dat?

58 Een belegger kocht twee aandelen: *Datafix* tegen 30 euro per aandeel en *Rock* aan 20 euro per aandeel, voor een totaal van 4000 euro. Het jaarlijks dividend van *Datafix* is 2 euro per aandeel en het jaarlijks dividend van *Rock* is 1 euro per aandeel. De belegger verwacht van deze twee fondsen in een jaar een totaal van 220 euro aan dividenden.

Hoeveel aandelen van elk fonds kocht de belegger?

59 De *Softflow Yogurt Company* produceert drie soorten yoghurtmengsels: *Limoen-Appelsien*, waarvoor twee kwart liter limoenyoghurt en twee kwart liter appelsienyoghurt gebruikt worden per liter mengsel, *Limoen-Citroen*, met drie kwart limoenyoghurt, één kwart citroenyoghurt per liter mengsel, *Appelsien-Citroen* met drie kwart appelsienyoghurt en één kwart citroenyoghurt per liter mengsel. Elke dag beschikt het bedrijf over 800 kwart limoenyoghurt, 650 kwart appelsienyoghurt en 350 kwart citroenyoghurt. Hoeveel liter moet het bedrijf dagelijks van elk mengsel maken opdat de beschikbare voorraad helemaal opgebruikt wordt?

60

Stroomwet van Kirchhoff

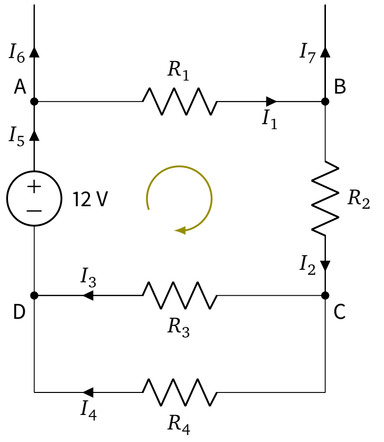
De som van de *ingaande stromen* in een knooppunt is gelijk aan de som van de *uitgaande stromen*.

Spanningswet van Kirchhoff

De som van de *spanningsverschillen* in een gesloten lus is nul.

De wet van Ohm

Bij een weerstand is het spanningsverschil $U = I \cdot R$.



Bijvoorbeeld in het knooppunt A geldt

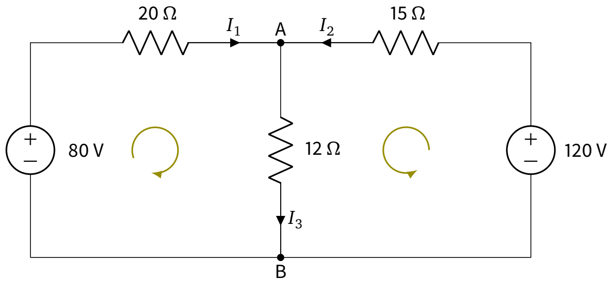
$$I_5 = I_1 + I_6.$$

Bijvoorbeeld in de lus ABCD geldt

$$12 - R_1 \cdot I_1 - R_2 \cdot I_2 - R_3 \cdot I_3 = 0.$$

We gaan in de spanningsbron in deze lus van een lage spanning (-) naar een hogere spanning (+), dus is er een positief spanningsverschil van +12 V. De spanning in elke weerstand *daalt*, dus is het spanningsverschil telkens *negatief*.

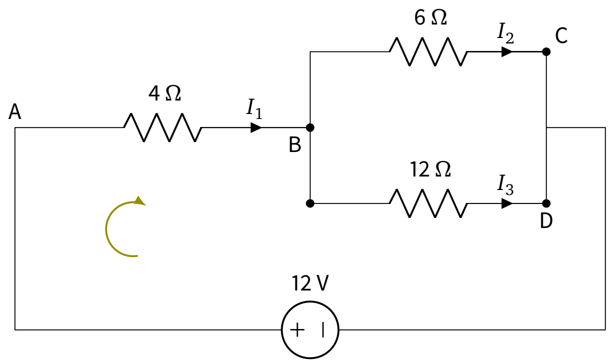
We *kiezen* de richtingen van de stromen (zie pijlen bij I_1, I_2, ...). Als we achteraf negatieve stromen uitkomen, moet de echte stroomrichting worden omgedraaid. We *kiezen* ook de richting van de lus — liefst zoveel mogelijk met de stroomrichting mee — bijvoorbeeld de lus ABCD *rechtsom*.



Ga na dat de toepassing van de stroomwet en de spanningswet van Kirchhoff het volgende stelsel oplevert, en los het stelsel op.

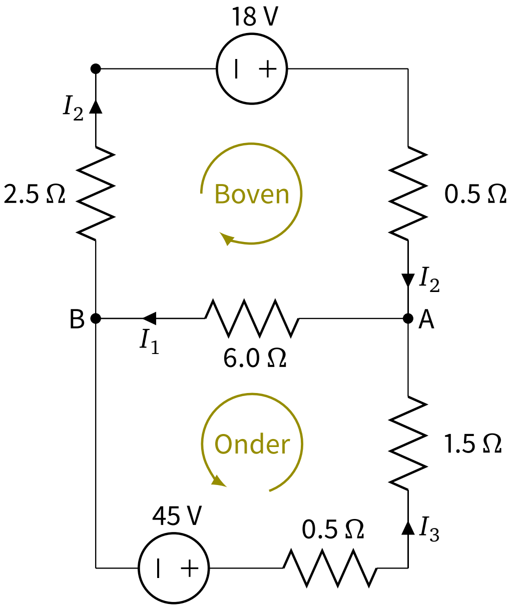
$$\begin{cases} 80 - 20I_1 - 12I_3 = 0 & \text{(in kring links)} \\ 120 - 15I_2 - 12I_3 = 0 & \text{(in kring rechts)} \\ I_1 + I_2 = I_3 & \text{(in A)} \end{cases}$$

61



Bereken de stromen door middel van een gepast stelsel.

62



Bereken de stromen door middel van een gepast stelsel.

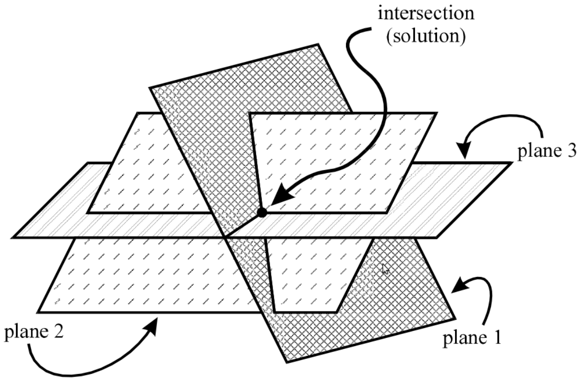
63

Stelsels van lineaire vergelijkingen werken ook in hogere dimensies, bijvoorbeeld in de driedimensionale ruimte.

Het volgende stelsel stelt niet drie rechten, maar drie vlakken voor. Elke vergelijking stelt een ander vlak voor.

$$\begin{cases} 2x + y - 2z = -2 \\ 3x - 2y + z = 2 \\ -2x - 2y + 3z = 3 \end{cases}$$

Dit stelsel oplossen betekent het snijpunt zoeken van de drie vlakken:



Zoek de coördinaten van dit snijpunt.

23 Stelsels van niet-eerstegraadsvergelijkingen

64 Bepaal de snijputen van de cirkel $(x-9)^2+(y-6)^2=25$ met de rechte $y=-2x+14$.

Het bijbehorende stelsel

$$\begin{cases}(x-9)^2+(y-6)^2=25\\ y=-2x+14\end{cases}$$

is *geen* stelsel van eerstegraadsvergelijkingen.

Je kunt het dus niet oplossen met de eliminatiemethode van Gauss.

Los het op met de *substitutiemethode*.

Maak een tekening van de cirkel en de rechte om de oplossing te controleren.

65 Bepaal de snijputen van de parabool $y=3x^2-2x-6$ met de rechte $y=2x+1$.

Plot de parabool en de rechte om de oplossing te controleren.

66 Bepaal de snijputen van de parabool $y=3x^2-2x+6$ met de rechte $y=2x+1$.

Plot de parabool en de rechte om de oplossing te controleren.

67 Bepaal de snijputen van de parabool $y=3x^2-2x+\frac{7}{3}$ met de rechte $y=2x+1$.

Plot de parabool en de rechte om de oplossing te controleren.

Oplossingen van de opdrachten

1

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -3 & 20 \\ 0 & 0 & 5 & 70 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

2

$$\begin{cases} x = 13 \\ y = 0 \\ z = 17 \end{cases}$$

3

$$\begin{cases} x = 13.60 \\ y = 5.35 \\ z = 12.00 \end{cases}$$

4 B 3 × 3-stelsel

5 C 3 × 4

6

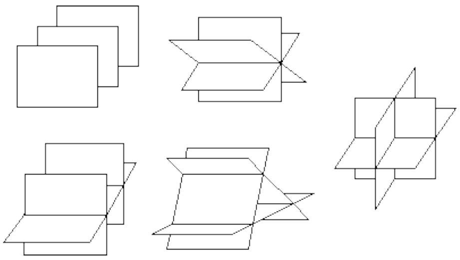
$$\begin{cases} a = -3 \\ b = 1 \\ c = 17 \\ d = 2 \end{cases}$$

7

$$\begin{cases} a = 3 \\ b = 0 \\ c = 2 \\ d = -1 \end{cases}$$

8 Een blokje (□) weegt 1.5 kg, en een driehoekje (▲) weegt 0.25 kg.

9



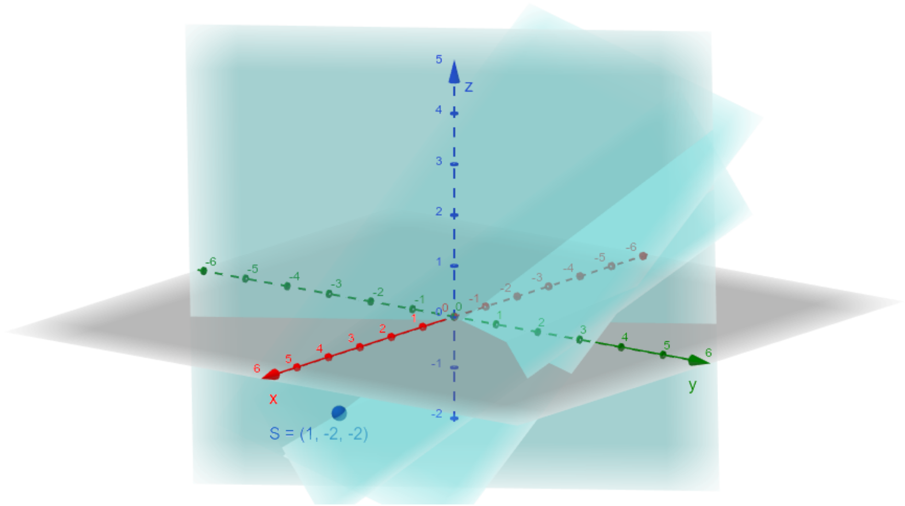
(a) Bepaald stelsel: de drie vlakken snijden elkaar in één punt (uiterst rechts).

(b) Onbepaald stelsel: de drie vlakken hebben een gemeenschappelijke snijlijn (midden boven).

(c) Vals stelsel:

- Ofwel, de drie vlakken zijn parallel (links boven);
- Ofwel, twee vlakken zijn parallel, en het derde vlak snijdt de andere twee vlakken (links onder);
- Ofwel, geen twee vlakken zijn parallel, dus ze snijden elkaar twee aan twee in drie onderling evenwijdige snijlijnen (midden onder).

10 $S(1,-2,-2)$



11 neen

12
(a) bepaald stelsel; de oplossing is (11, 13, 15,17)

(b) bepaald stelsel; de oplossing is (11, 0, 4, 6)

(c) bepaald stelsel; de oplossing is (11, 0)

(d) vals stelsel; er is geen oplossing

13 stelsels met dezelfde oplossingen

14 één oplossing

15 Een 2 × 4 matrix heeft twee vergelijkingen en vier onbekenden.

16 een vals stelsel

17
(a) Noem x en y de twee gezochte getallen.

(b) Hier is het bijbehorende stelsel.

$$\left\{ x + y = 10 \right.$$

(c) Hier is de *rref*.

$$\begin{array}{ccc} x & y & \\ \left[\begin{matrix} 1 \end{matrix}\right. & 1 & \left|\; 10 \right] \end{array}$$

(d) De oplossingenverzameling is

$$\{\,(10 - y,\ y);\ y \in \mathbb{R}\}.$$

18
(a) Bijvoorbeeld: (2, 0, 0), (2, 13, 13), (2, -3.5, -3.5).

(b) Bijvoorbeeld: (3, 7, 6), (0, 13, 0), (1, 1, 2).

Een stelsel met *twee* vrij te kiezen parameters heet *tweevoudig onbepaald*.

(c) Bijvoorbeeld: (2, 0, 0), (12, 0, 10), (100, 0, 98).

(d) Bijvoorbeeld: (7, 13, 20, 107, 5), (1, 1, 2, -77, 5), (50, 10, 60, -2.5, 5).

Een stelsel met *drie* vrij te kiezen parameters heet *drievoudig onbepaald*.

19

(a) $\begin{cases} y = 2x \end{cases}$

Dit stelsel is enkelvoudig onbepaald.

(b) $\begin{cases} x = -1 \\ y = \frac{2}{3} \\ z = 4 \end{cases}$

Dit stelsel is een bepaald stelsel.

(c) $\begin{cases} x = 2 \\ z = 3 - y \end{cases}$

Dit stelsel is enkelvoudig onbepaald.

(d) $\begin{cases} y = x - z \end{cases}$

Dit stelsel is tweevoudig onbepaald.

(e) $\begin{cases} x = 1 + 0.5z \\ y = 0 \end{cases}$

Dit stelsel is enkelvoudig onbepaald.

20

(a) Rref. De oplossing is: $\boxed{(5,8,0)}$.

(b) Nog niet helemaal in *rref*, want het hoofdelement in de tweede rij is nog niet gelijk aan 1. Als de tweede rij vereenvoudigd wordt (delen door 2), dan verschijnt de *rref*.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

De oplossing is $\boxed{(5,4,0)}$.

(c) Geen *rref*, want de hoofdelementen staan nog niet in trapvorm. Zet R_1 achteraan en het is oké. Het betreft hier bovendien een $\boxed{\text{vals stelsel}}$. De eerste vergelijking luidt: $0x + 0y + 0z = 1$ of $0 = 1$, en dit is een valse uitspraak.

(d) Nog niet in een gereduceerde vorm, want het hoofdelement in de eerste rij staat nog niet in een geveegde kolom. Eigenlijk kun je de laatste (ofwel de eerste) vergelijking schrappen, want ze is een kopie van de eerste vergelijking en levert dus geen extra informatie op. Als de eerste vergelijking geschrapt is, ontstaat een 2×3 stelsel dat wel in de *rref* staat. Er zijn dan twee hoofdelementen voor twee vergelijkingen. Dat is juist gepast. Er is dan wel een vergelijking *tekort* opdat het stelsel zou bepaald zijn. Dit stelsel heeft oneindig veel oplossingen. De oplossingenverzameling is De oplossingenverzameling is $\boxed{\{\,(r,\ 0,\ 0);\ r \in \mathbb{R}\}}$.

(e) Nog niet in *rref*, want de hoofdelementen staan nog niet in trapvorm. Verwissel de eerste en de derde rij en het is oké. De gereduceerde trapvorm is

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 30 \\ 0 & 1 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & 1 & 10 \end{array}\right] \end{array}.$$

De oplossing is $\boxed{(30,20,10)}$.

(f) *Rref*. Er zijn oneindig veel oplossingen, want één vergelijking te kort voor drie onbekenden. De onbekende z is de *nevenonbekende*.

De oplossingenverzameling is $\boxed{\{\,(-5r,\ 2-2r,\ r\ );\ r \in \mathbb{R}\}}$.

(g) Nog niet in *rref*, want de kolom van onbekende y moet nog geveegd worden. De oplossing is $\boxed{(-1,2)}$.

(h) Bijna in *rref*, want het hoofdelement in de tweede rij is nog niet 1. Maar het stelsel is *vals*.

(i) Nog niet in *rref*, want de nulrij staat nog niet onderaan. Schrap de nulrij, en je krijgt de volgende *rref*

$$\begin{array}{ccc|c} x & y & z & \\ \hline 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}.$$

De oplossing is $\boxed{(5,-3,2)}$.

(j) Geen *rref*, want het hoofdelement in de eerste rij staat nog niet in een geveegde kolom.

Het betreft hier een *vals stelsel*, want $x = 13$, $x = 14$ en $x = 0$ kunnen niet gelijktijdig waar zijn.

21 (a) $\boxed{\textcircled{1} \cdot R_1 - \textcircled{3} \cdot R_2}$ $\boxed{\frac{1}{8} \cdot R_1}$ $\boxed{\textcircled{1} \cdot R_2 - (\textcircled{-1}) \cdot R_1}$, dus: $\boxed{R_2 + R_1}$.

(b) De oplossing is $\boxed{(2,\ 1)}$.

22 (a) $\boxed{\textcircled{2} \cdot R_2 - \textcircled{5} \cdot R_1}$ $\boxed{\frac{1}{-23} \cdot R_2}$ $\boxed{\textcircled{1} \cdot R_1 - (\textcircled{3}) \cdot R_2}$. $\boxed{\frac{1}{2} \cdot R_1}$

(b) De oplossing is $\boxed{(-4,\ 5)}$.

23 (a) $\boxed{(3,\ 1,\ 2)}$

(b) $\boxed{(1,\ -1)}$

(c) $\boxed{(-3,\ -5)}$

(d) $\boxed{(0.5,\ 2)}$

(e) $\boxed{\left(\frac{5}{13}, \frac{1}{13}\right)}$

(f) $\boxed{(0.7,\ 0.9,\ 1.1)}$

(g) $\boxed{\left(-\frac{2}{3}, \frac{5}{6}, 0\right)}$

(h) $\boxed{(2,\ 1,\ 0)}$

(i) $\boxed{(7.5,\ 2.5,\ 25)}$

(j) $\boxed{\text{vals stelsel: geen oplossing}}$

24 (a) Bepaald stelsel. De oplossing is $\boxed{(2,\ -3, 0)}$.

(b) Enkelvoudig onbepaald stelsel. De oplossingenverzameling is $\boxed{\{\ (3-2r,\ -2-r,\ r);\ r \in \mathbb{R}\}}$.

(c) Vals stelsel. Geen oplossing.

(d) Enkelvoudig onbepaald stelsel. De oplossingenverzameling is $\boxed{\{\ (4-2r,\ r,\ -2);\ r \in \mathbb{R}\}}$.

(e) Enkelvoudig onbepaald stelsel. De oplossingenverzameling is $\boxed{\{\ (3+r,\ 2-r,\ r);\ r \in \mathbb{R}\}}$.

(f) Vals stelsel. Geen oplossing.

25 (a) Bepaald stelsel. De oplossing is $\boxed{(2,\ -0.25,\ 0.75)}$.

(b) Vals stelsel. Geen oplossing.

(c) Bepaald stelsel. De oplossing: $\boxed{(0,\ 0,\ 0)}$.

(d) Enkelvoudig onbepaald stelsel. De oplossingenverzameling is

ofwel $\boxed{\left\{\left(\frac{5-r}{5},\ \frac{17r+15}{5},\ r\right);\ r \in \mathbb{R}\right\}}$ (spillen gekozen in de x-kolom en de y-kolom),

ofwel $\boxed{\{\ (r,\ 20-17r,\ 5-5r);\ r \in \mathbb{R}\}}$ (spillen gekozen in de y-kolom en de z-kolom),

ofwel $\boxed{\left\{\left(\frac{20-r}{17},\ r,\ \frac{5r-15}{17}\right);\ r \in \mathbb{R}\right\}}$ (spillen gekozen in de x-kolom en de z-kolom).

(Het is voldoende als je één van deze drie oplossingenverzamelingen geeft. Ze zijn onderling gelijkwaardig. Je krijgt deze verschillende vormen van oplossingen naargelang de spillen die je gekozen hebt.)

(e) Vals stelsel. Geen oplossing.

(f) Enkelvoudig onbepaald stelsel. De oplossingenverzameling is

ofwel $\boxed{\left\{\left(-\frac{3}{7}r,\ \frac{4}{7}r,\ r\right);\ r \in \mathbb{R}\right\}}$, ofwel $\boxed{\left\{\left(-\frac{3}{4}r,\ r,\ -\frac{7}{4}r\right);\ r \in \mathbb{R}\right\}}$, ofwel $\boxed{\left\{\left(r,\ -\frac{4}{3}r,\ -\frac{7}{3}r\right);\ r \in \mathbb{R}\right\}}$.

(Het is voldoende als je één van deze drie oplossingenverzamelingen geeft. Ze zijn onderling gelijkwaardig. Je krijgt deze verschillende vormen van oplossingen naargelang de spillen die je gekozen hebt.)

(g) Vals stelsel. Geen oplossing.

(h) Bepaald stelsel. De oplossing is $\boxed{(2.5,\ -1,\ -0.5)}$.

26 De drie oplossingen zijn $\boxed{(2,\ 4,\ 5)}$, $\boxed{(-4,\ -7,\ -8)}$ en $\boxed{(3,\ 4,\ 4)}$.

27 De coëfficiënten van een stelsel zijn de getallen die bij de onbekenden staan. Bijvoorbeeld in $1x-3z=14$ zijn 1, 0 en -3 de coëfficiënten van respectievelijk x, y en z. De bekende term is in dit voorbeeld 14.

De coëfficiënten staan in de uitgebreide matrix vóór de verticale streep, en de bekende termen staan áchter de verticale streep.

28 Stel x de prijs van een water, y de prijs van een broodje en z de prijs van een thee. De oplossing is dan $\boxed{(1, 1.60, 2)}$.

29 Noem de twee getallen x en y.

$$\begin{cases} x+y=10 \\ x-y=10 \end{cases}$$

De oplossing is $\boxed{(10,0)}$.

30

$$\begin{cases} a+b+c+d=100 \\ a=2b \\ b=2c \\ c=2d \end{cases}$$

De oplossing is $\boxed{\left(\frac{160}{3},\frac{80}{3},\frac{40}{3},\frac{20}{3}\right)}$.

31 Stel x de prijs van een water, y de prijs van een broodje en z de prijs van een thee.

Het stelsel is vals. Er is geen oplossing.

Als een water toch 1 euro kost, en een thee 2 euro (zie tafels 1, en 3 uit de vorige opdracht), kloppen de rekeningen van tafel 4 en tafel 6 nog wel, maar heeft tafel 5 1 euro teveel betaald (fooi?).

32 Noem de leeftijden van de vier kinderen: a (oudste) , b, c en d.

$$\begin{cases} a+b+c+d=36 \\ a=d+6 \\ b=d+4 \\ c=d+2 \end{cases}$$

De oplossing is $\boxed{(12,10,8,6)}$.

33

$$\begin{cases} 2f+3b+4r=67 \\ f=v \\ f=b+10 \\ b=7 \end{cases}$$

De oplossing is $\boxed{(17,7,3,17)}$.

34 (1.25, 2.05, 0.15)

35 (0.25, 0.50, 0.75)

36 (443.05, 341.40, 43)

37 (27.00, 18.00, 15.00)

38 (99, 75, 26)

39 $y=-x+3$

Deze ‘kromme’ is dus een rechte.

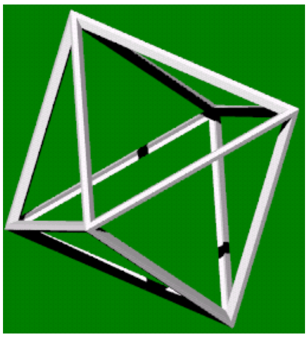
40 $y=-\frac{1}{6}x^2-\frac{1}{6}x+1$

41 $y = -\frac{5}{6}x^2 + \frac{7}{2}x - \frac{5}{3}$

42 De drie rechten snijden elkaar niet in eenzelfde punt. Voldoende inzoomen om te zien dat een derde rechte het snijpunt van de andere twee rechten juist mist!

Vervang de derde rechte door $y = 6.2$ en de drie rechten snijden elkaar wel in eenzelfde punt:

44



De oplossing is een achtvlak $(f, v, e) = (8, 6, 12)$.

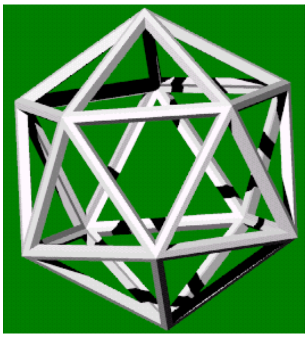
(Afbeelding: Dick Klingens `http://www.pandd.demon.nl`. Het copyright van deze afbeelding valt onder de *Creative Commons licentie* `http://creativecommons.org/licenses/by-nc/2.5/nl/`.)

45

$$\begin{cases} f + v = e + 2 \\ 2e = 4f \\ 2e = 4v \end{cases}$$

Dit stelsel is $\boxed{\text{vals}}$. Er bestaat dus geen enkele bolle ruimtefiguur waarvan de zijvlakken *vierhoeken* zijn zodat in elk hoekpunt *vier ribben* samenkomen.

46

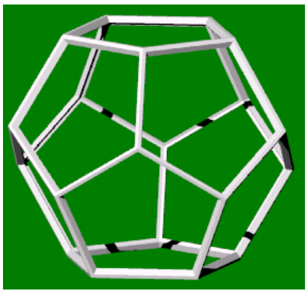


$$\begin{cases} f + v = e + 2 \\ 2e = 3f \\ 2e = 5v \end{cases}$$

De oplossing is het twintigvlak $(f, v, e) = (20, 12, 30)$.

(Afbeelding: Dick Klingens `http://www.pandd.demon.nl`. Het copyright van deze afbeelding valt onder de *Creative Commons licentie* `http://creativecommons.org/licenses/by-nc/2.5/nl/`.)

47



$$\begin{cases} f + v = e + 2 \\ 5f - 2e = 0 \\ 3v - 2e = 0 \end{cases}$$

De oplossing is het twaalfvlak $(f, v, e) = (12, 20, 30)$.

(Afbeelding: Dick Klingens `http://www.pandd.demon.nl`. Het copyright van deze afbeelding valt onder de *Creative Commons licentie* `http://creativecommons.org/licenses/by-nc/2.5/nl/`.)

48 $\boxed{(f, v, e, v_a, v_s) = (30, 32, 60, 12, 20)}$

$\boxed{\text{Boodschappenlijst: 12 appels, 20 sinaasappelen, 60 vorken.}}$

49 Er zijn $\boxed{\text{120 potloden}}$ nodig.

50

Er zijn $\boxed{2 \cdot 150 = 300 \text{ paperclips}}$ nodig.

In elk hoekpunt komen vier driehoeken en één vijfhoek samen.

Er bestaan twee chirale vormen van de stompe dodecaëder: een rechtshandig en een linkshandig model.

Je vindt hier een filmpje om de *snub dodecahedron* te construern met behulp van *Zen magneetbolletjes*

`https://www.youtube.com/watch?v=JbFb8HGQgPE` Snub Dodecahedron Frame Tutorial (Zen Magnets)

51

$$\begin{cases} f + v = 2 + e \\ 2e = 4f \qquad \text{(vierhoeken)} \\ 2e = 7 \cdot 4 + (v-7) \cdot 3 \end{cases}$$

$$\begin{array}{ccc|c} f & v & e & \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 7 \end{array} \xrightarrow{\text{rref}} \boxed{\begin{cases} f = 13 \\ v = 15 \\ e = 26 \end{cases}}$$

52 $\boxed{(f, v, e, f_6, f_5) = (32, 60, 90, 20, 12)}$

53 Leg op elk zwarte vijfhoek een appel en op elke witte zeshoek een sinaasappel. De vorken verbinden dan de middelpunten van de vijfhoeken met de middelpunten van de zeshoeken.

54 Er komen $\boxed{\text{90 klanten } \textit{meer} \text{ voorbij}}$ de nieuwe locatie. Verhuizen loont dus de moeite!

55 Het verkeer in de zuidelijke richting (v) $\boxed{\text{lager}}$ is dan in de noordelijke richting (u).

56 (a)

$$\begin{cases} 100 + w = x + z \\ y + z = 75 + w \\ x = 25 + y \end{cases}$$

We hebben bovendien ook de bijkomende eis dat alle onbekenden x, y, z, w positief of nul moeten zijn.

(b)

$$\begin{cases} x = 100 - z + w \\ y = 75 - z + w \end{cases}$$

(c) Er rijden $\boxed{\text{minstens 100 auto's}}$ in de Rozenstraat.

(d) Er rijden $\boxed{\text{hoogstens 125 auto's per uur}}$ in de Hoofdstraat.

(e) $\boxed{\text{Ja, er kunnen 1000 auto's per uur rijden in de Zuidstraat.}}$

57 (a) $\boxed{(16,\ 22,\ 22,\ 40)}$

(b) $\boxed{(10,\ 20,\ 30,\ 40)}$

(c)

58 $\boxed{(40, 140)}$

59 De oplossing: $\boxed{(100, 200, 150)}$.
Het bedrijf moet dus 100 liter Limoen-Appelsienmengsel, 200 liter Limoen-Citroenmengsel en 150 liter Appelsien-Citroenmengsel produceren.

60 $\boxed{I_1 = 1\text{ A}}$ $\boxed{I_2 = 4\text{ A}}$ $\boxed{I_3 = 5\text{ A}}$

61

$$\begin{aligned} I_1 &= \ 1.5\text{ A} \\ I_2 &= \ 1\text{ A} \\ I_3 &= \ 0.5\text{ A} \end{aligned}$$

62

$$\begin{aligned} I_1 &= \ 4.75\text{ A} \\ I_2 &= \text{-}3.50\text{ A} \\ I_3 &= \ 8.25\text{ A} \end{aligned}$$

63 (1, 2, 3)

64 De cirkel snijdt de rechte in twee punten: $(4,\quad 6)$ en $(6,\quad 2)$.

65 De rechte snijdt de parabool in twee punten: $(-1,\ -1)$ en $(\frac{7}{3},\ \frac{17}{3}) \approx (2.33,\ 5.67)$.

66 De rechte snijdt de parabool niet.

67 De rechte snijdt de parabool in juist één punt: $(\frac{2}{3},\ \frac{7}{3}) \approx (0.67,\ 2.33)$.

Trefwoordenregister

Uitwerkingen van de opdrachten

44 De bijbehorende ruimtefiguur bestaat uit *driehoeken*, en in elk hoekpunt komen *vier ribben* samen. Het stelsel vertaald in vraagvorm is dus als volgt.

Vraag

Bestaat er een bolle ruimtefiguur waarvan de zijvlakken *driehoeken* zijn zodat in elk hoekpunt vier ribben samenkomen?

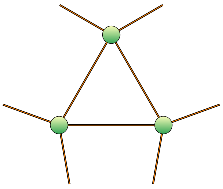
Formule van Euler voor veelvlakken

Een eerste vergelijking wordt gegeven door de formule van Euler voor veelvlakken.

$$f+v=e+2 \tag{1}$$

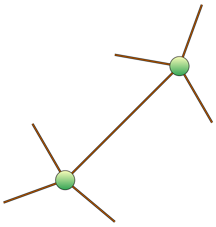
Elk zijvlak heeft drie ribben, dit geeft $3\cdot f$ ribben, maar elke ribbe grenst aan twee zijvlakken en telt dus dubbel. Dit geeft de tweede vergelijking

$$2e=3f. \tag{2}$$



In elk hoekpunt komen vier ribben samen, dit geeft $4v$ ribben, maar elke ribbe verbindt twee hoekpunten en telt dus dubbel. Dit geeft de derde vergelijking

$$2e=4v. \tag{3}$$

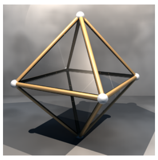


Het volledige stelsel van drie vergelijkingen:

$$\left\{\begin{array}{l} f+v=e+2\\ 2e=3f\\ 2e=4v\end{array}\right. \qquad \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} f & v & e & \end{array}\\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2\\ 3 & 0 & -2 & 0\\ 0 & 4 & -2 & 0\end{array}\right]\end{array} \xrightarrow{\text{rref}} \boxed{\left\{\begin{array}{l} f=8\\ v=6\\ e=12\end{array}\right.}.$$

Antwoord

De enige bolle ruimtefiguur waarvan de zijvlakken *driehoeken* zijn zodat in elk hoekpunt *vijf ribben* samenkomen is een *achtvlak*.



45

Vraag

Bestaat er een bolle ruimtefiguur waarvan de zijvlakken *vierhoeken* zijn zodat in elk hoekpunt *vier ribben* samenkomen?

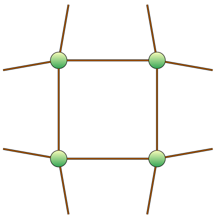
Formule van Euler voor veelvlakken

Een eerste vergelijking wordt gegeven door de formule van Euler voor veelvlakken.

$$f+v=e+2 \tag{1}$$

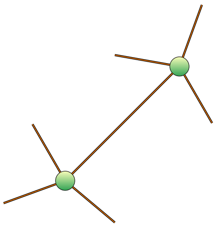
Elk zijvlak heeft vier ribben, dit geeft $4\cdot f$ ribben, maar elke ribbe grenst aan twee zijvlakken en telt dus dubbel. Dit geeft de tweede vergelijking

$$2e=4f. \tag{2}$$



In elk hoekpunt komen vier ribben samen, dit geeft $4v$ ribben, maar elke ribbe verbindt twee hoekpunten en telt dus dubbel. Dit geeft de derde vergelijking

$$2e=4v. \tag{3}$$



Het volledige stelsel van drie vergelijkingen:

$$\left\{\begin{array}{l} f+v=e+2 \\ 2e=4f \\ 2e=4v \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} f & v & e & \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & -2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{rref}} \left[\begin{array}{ccc|c} f & v & e & \\ 1 & 0 & -0.5 & 0 \\ 0 & 1 & -0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \boxed{\text{Vals stelsel.}}$$

Antwoord

Er bestaat *geen* bolle ruimtefiguur waarvan de zijvlakken *vierhoeken* zijn zodat in elk hoekpunt *vier ribben* samenkomen.

46

Vraag

Bestaat er een bolle ruimtefiguur waarvan de zijvlakken *driehoeken* zijn zodat in elk hoekpunt *vijf ribben* samenkomen?

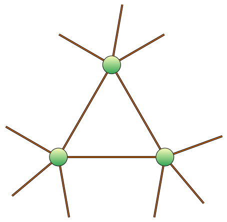
Formule van Euler voor veelvlakken

Een eerste vergelijking wordt gegeven door de formule van Euler voor veelvlakken.

$$f+v=e+2 \tag{1}$$

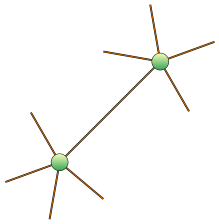
Elk zijvlak heeft drie ribben, dit geeft $3\cdot f$ ribben, maar elke ribbe grenst aan twee zijvlakken en telt dus dubbel. Dit geeft de tweede vergelijking

$$2e=3f. \tag{2}$$



In elk hoekpunt komen vier ribben samen, dit geeft $4v$ ribben, maar elke ribbe verbindt twee hoekpunten en telt dus dubbel. Dit geeft de derde vergelijking

$$2e=5v. \tag{3}$$

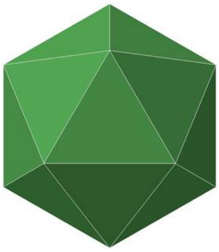


Het volledige stelsel van drie vergelijkingen:

$$\begin{cases} f+v=e+2\\ 2e=3f\\ 2e=5v \end{cases} \qquad \begin{array}{ccc|c} f & v & e & \\ 1 & 1 & -1 & 2\\ 3 & 0 & -2 & 0\\ 0 & 5 & -2 & 0 \end{array} \xrightarrow{\text{rref}} \boxed{\begin{cases} f=20\\ v=12\\ e=30 \end{cases}}.$$

Antwoord

De enige bolle ruimtefiguur waarvan de zijvlakken *driehoeken* zijn zodat in elk hoekpunt *vijf ribben* samenkomen is een *twintigvlak*.



47

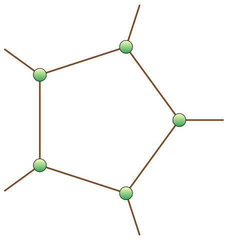
Vraag

Bestaat er een bolle ruimtefiguur waarvan de zijvlakken *vijfhoeken* zijn zodat in elk hoekpunt *drie ribben* samenkomen?

Formule van Euler voor veelvlakken

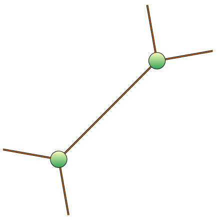
Een eerste vergelijking wordt gegeven door de formule van Euler voor veelvlakken.

$$f+v=e+2 \tag{1}$$



Elk zijvlak heeft vijf ribben, dit geeft $5\cdot f$ ribben, maar elke ribbe grenst aan twee zijvlakken en telt dus dubbel. Dit geeft de tweede vergelijking

$$2e=5f. \tag{2}$$



In elk hoekpunt komen drie ribben samen, dit geeft $3v$ ribben, maar elke ribbe verbindt twee hoekpunten en telt dus dubbel. Dit geeft de derde vergelijking

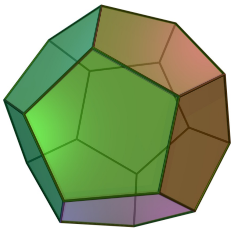
$$2e=3v. \tag{3}$$

Het volledige stelsel van drie vergelijkingen:

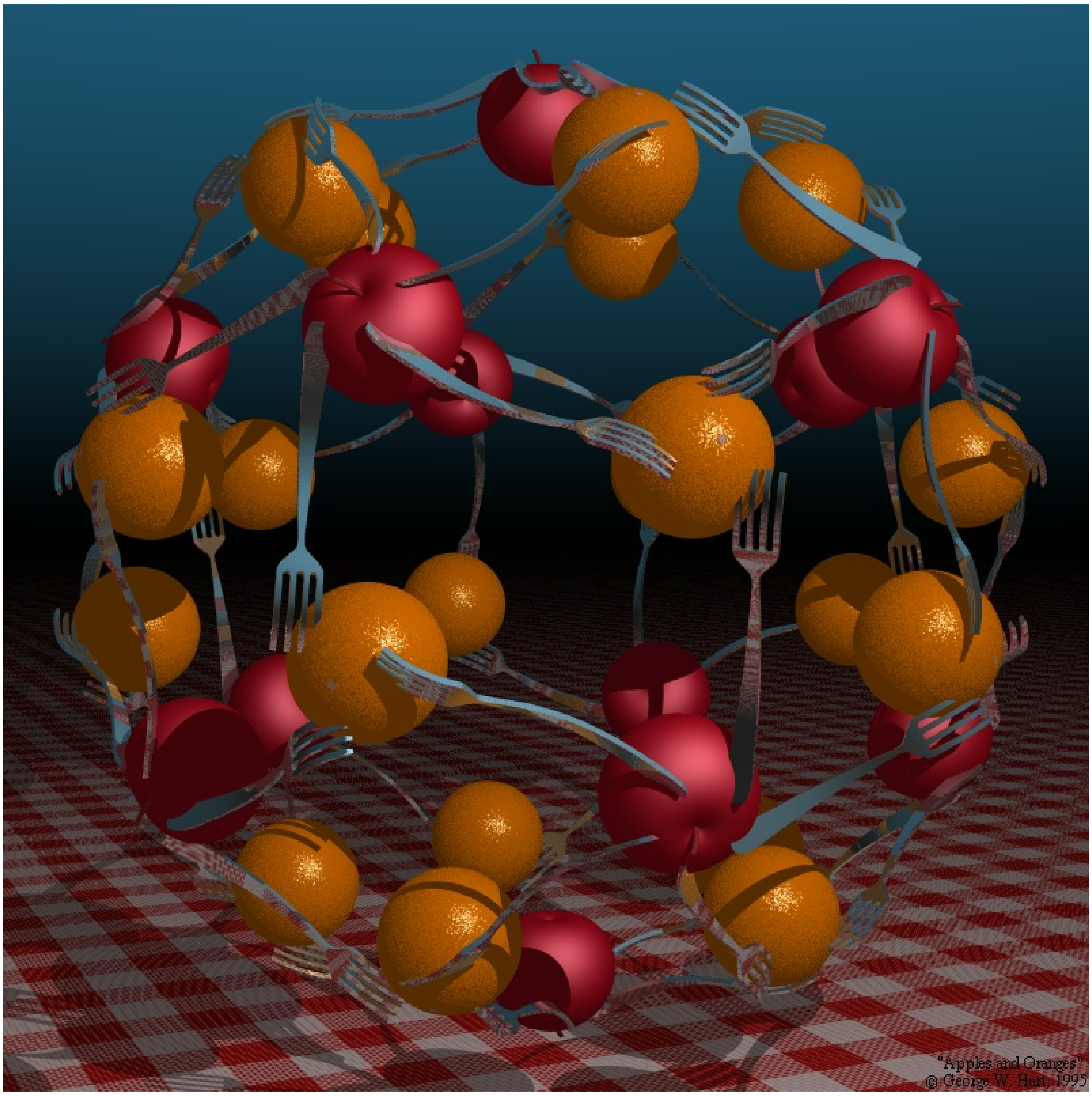
$$\begin{cases} f+v=e+2 \\ 2e=5f \\ 2e=3v \end{cases} \qquad \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f & v & e \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 5 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \end{array}\right] \end{array} \xrightarrow{\text{rref}} \boxed{\begin{cases} f=12 \\ v=20 \\ e=30 \end{cases}}.$$

Antwoord

De enige bolle ruimtefiguur waarvan de zijvlakken *vijfhoeken* zijn zodat in elk hoekpunt *drie ribben* samenkomen is een *twaalfvlak* of de *dodecaëder*.



48 Merk op dat elke vork aan één kant op een appel rust, en aan de andere kant in een sinaasappel steekt. Bovendien steunen op elke appel vijf vorken en steken in elke sinaasappel drie vorken.



"Apples and Oranges"
© George W. Hart, 1995

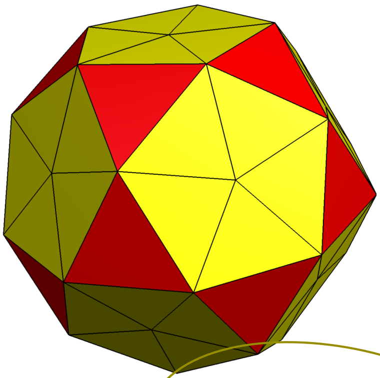
Het volledige stelsel van drie vergelijkingen:

$$\begin{cases} f+v=e+2 \\ 2e=4f \\ e=5v_5 \\ e=3v_3 \\ v=v_5+v_3 \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{ccccc|c} f & v & e & v_a & v_s & \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 2 \\ -4 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{rref}} \boxed{\begin{cases} f=30 \\ v=32 \\ e=60 \\ v_a=12 \\ v_s=20 \end{cases}}.$$

Boodschappenlijst: 12 appels, 20 sinaasappelen, 60 vorken.

49 Hier zijn reeds vier vergelijkingen.

$$\begin{cases} f+v=e+2 \\ 2e=3f \\ 2e=5v_5+6v_6 \\ v=v_5+v_6 \end{cases}$$



Als je goed kijkt, zie je een aantal grote vijfhoeken (bestaande uit vijf driehoeken). Elk hoekpunt waar vijf potloden samenkomen is het centrum van zo'n vijfhoek. Voor elk zo'n vijfhoek zijn er vijf hoekpunten op de rand, en één in het centrum. De hoekpunten op de rand worden dubbel geteld.

We hebben dus de vijfde vergelijking:

$$v = \frac{5}{2}\cdot v_5 + v_5.$$

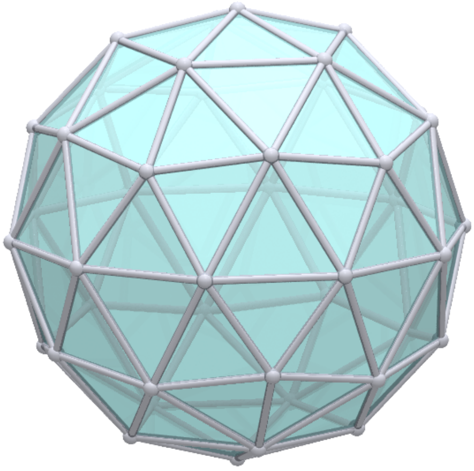
Per vijfhoek zijn er 5 hoekpunten op de rand, maar deze tellen dubbel voor telkens 2 vijfhoeken.

Per vijfhoek is er nog een hoekpunt in het centrum van een vijfhoek.

Hier is het hele stelsel.

$$\begin{cases} f+v=e+2 \\ 2e=3f \\ 2e=5v_5+6v_6 \\ v=v_5+v_6 \\ v=\frac{7}{2}v_5 \end{cases} \qquad \begin{array}{ccccc|c} f & v & e & v_5 & v_6 & \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -5 & -6 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3.5 & 0 & 0 \end{array} \xrightarrow{\text{rref}} \begin{cases} f=80 \\ v=42 \\ e=120 \\ v_5=12 \\ v_6=30 \end{cases}$$

Er zijn dus $\boxed{\text{120 potloden}}$ nodig.



De vijfhoeken zijn opgebouwd uit gelijkbenige *driehoeken* (niet gelijkzijdig!). Er zijn in totaal 80 driehoeken, waarvan 60 gelijkbenig en 20 gelijkzijdig. Deze 20 gelijkzijdige driehoeken houden de grote vijfhoeken samen.

50 Hier zijn reeds vier vergelijkingen.

$$\begin{cases} f+v=e+2 \\ 2e=3f_3+5f_5 \\ 2e=5v \\ f=f_3+f_5 \end{cases}$$

De vijfde vergelijking

Alle hoekpunten zijn precies één keer hoekpunt van een vijfhoek. We hebben dus de vijfde vergelijking.

$$v=5f_5$$

Alternatieve vijfde vergelijking

Alle hoekpunten zijn ook hoekpunt van vier driehoeken.

$$4v=3f_3$$

Hier is het hele stelsel.

$$\begin{cases} f+v=e+2 \\ 2e=3f_3+5f_5 \\ 2e=5v \\ f=f_3+f_5 \\ v=5f_5 \end{cases}$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc|c} {\scriptstyle f} & {\scriptstyle v} & {\scriptstyle e} & {\scriptstyle f_3} & {\scriptstyle f_5} & \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -5 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -3 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -5 & 0 \end{array}\right] \end{array} \xrightarrow{\text{rref}} \begin{cases} f=92 \\ v=60 \\ e=150 \\ f_3=80 \\ f_5=12 \end{cases} \quad \text{Er zijn dus } \boxed{2\cdot 150=300 \text{ paperclips}} \text{ nodig.}$$

In elk hoekpunt komen vier driehoeken en één vijfhoek samen. Er bestaan twee chirale vormen van de stompe dodecaëder.

Je vindt hier een filmpje om de *snub dodecahedron* te construern met behulp van *Zen magneetbolletjes*

`https://www.youtube.com/watch?v=JbFb8HGQgPE` Snub Dodecahedron Frame Tutorial (Zen Magnets)

52

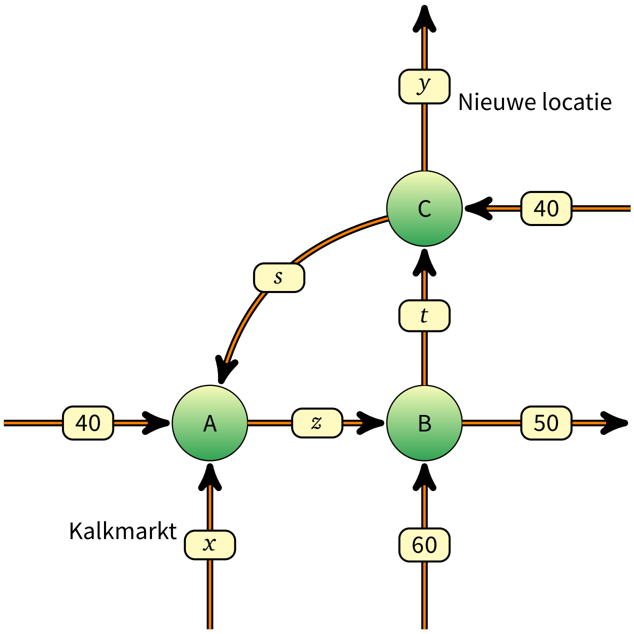
Je hebt alleen de vijfhoeken nodig om *alle* hoekpunten te tellen. (Of alleen de zeshoeken, maar dan heb je de hoekpunten dubbel geteld.)

Het volledige stelsel van drie vergelijkingen:

$$\begin{cases} f+v=e+2 \\ f=f_5+f_6 \\ 2e=3v \\ 2e=5f_5+6f_6 \\ v=5f_5 \\ (2v=6f_6) \end{cases} \quad \begin{array}{ccccc|c} f & v & e & f_5 & f_6 & \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -5 & -6 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & -1 & 0 \end{array} \xrightarrow{\text{rref}} \boxed{\begin{cases} f=32 \\ v=60 \\ e=90 \\ f_5=12 \\ f_6=20 \end{cases}}.$$

53 Leg op elk zwarte vijfhoek een appel en op elke witte zeshoek een sinaasappel. De vorken verbinden dan de middelpunten van de vijfhoeken met de middelpunten van de zeshoeken.

54 (a)



Bij elke rotonde geldt: *verkeer in = verkeer uit*. We hebben dus drie vergelijkingen.

$$\begin{cases} 40+x+s=z \\ 60+z=50+t \\ 40+t=y+s \end{cases}$$

Bovendien geldt dat alle onbekenden x, y, z, s, t *positief of nul* moeten zijn.

(b)

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} x & y & z & s & t & \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -40 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -10 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 40 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{rref}} \left[\begin{array}{ccccc|c} x & y & z & s & t & \\ 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -50 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 40 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -10 \end{array}\right] \to \begin{cases} x=t-s-50 \\ y=40-s+t \\ z=t-10 \end{cases}$$

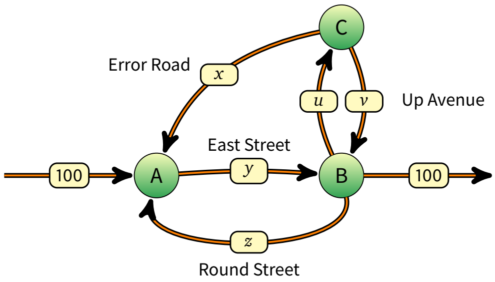
(c) We hebben dus als gevolg

$$y-x=(40-s+t)-(-s+t-50)=90$$

$$\boxed{y-x=90}.$$

Er komen dus 90 klanten *meer* voorbij de nieuwe locatie. Verhuizen loont dus de moeite!

55 (a)



Bij elke rotonde geldt: *verkeer in* = *verkeer uit*. We hebben dus drie vergelijkingen.

$$\begin{cases} 100 + x + z = y \\ y + v = u + z + 100 \\ u = x + v \end{cases}$$

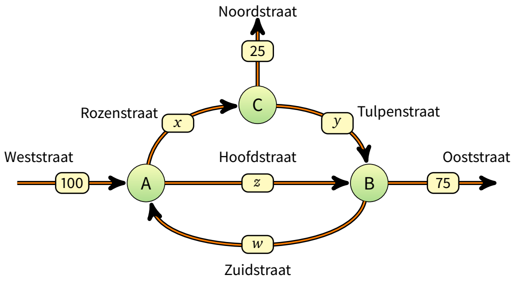
Bovendien geldt dat alle onbekenden x, y, z, u, v *positief of nul* moeten zijn.

(b)

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} x & y & z & u & v & \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & -100 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 100 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{rref}} \left[\begin{array}{ccccc|c} x & y & z & u & v & \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 100 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \to \begin{cases} x = u - v \\ y = z + u - v + 100 \end{cases}$$

(c) Omdat x positief of nul moet zijn, en dus ook $u - v$, geldt dus $\boxed{u \geq v}$. Dus, het verkeer in de zuidelijke richting (v) is $\boxed{\text{lager}}$ is dan in de noordelijke richting (u).

56 (a)



Bij elke rotonde geldt: *verkeer in* = *verkeer uit*. We hebben dus drie vergelijkingen.

$$\begin{cases} 100 + w = x + z \\ y + z = 75 + w \\ x = 25 + y \end{cases}$$

Bovendien geldt dat alle onbekenden x, y, z, w *positief of nul* moeten zijn.

(b)

$$\left[\begin{array}{cccc|c} x & y & z & w & \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 100 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 75 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 25 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{rref}} \left[\begin{array}{cccc|c} x & y & z & w & \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 100 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 75 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \to \begin{cases} x = 100 - z + w \\ y = 75 - z + w \end{cases}$$

(c) Als $z = 0$ (geen verkeer in de Hoofdstraat), dan wordt de eerste vergelijking in het opgelost stelsel

$$x = 100 + w.$$

Dit betekent $\boxed{x \geq 100}$. Er rijden dus minstens 100 auto's per uur in de Rozenstraat.

$$u \geq v.$$

(d) Als er geldt $w = 50$ (verkeersdrukte in de Zuidstraat), dan geldt

$$\begin{cases} x = 150 - z \\ y = 125 - z. \end{cases}$$

Uit de eerste vergelijking volgt dat $z \leq 150$. En uit de tweede vergelijking volgt dat $z \leq 125$. Omdat beide vergelijkingen tegelijkertijd moeten worden voldaan geldt dus $\boxed{z \leq 125}$. Er rijden dus hoogstens 125 auto's per uur in de Hoofdstraat.

(e) Stel $w = 1000$ (verkeeersdrukte in de Zuidstraat), dan hebben we

$$\begin{cases} x = 1100 - z \\ y = 1075 - z \end{cases}$$

De verkeersdruktes x en y moeten positief of nul zijn, dus voor elke waarde van z kleiner dan 1075, is er een (positieve) oplossing voor x en y.

Dus $\boxed{\text{ja, er kunnen 1000 auto's per uur rijden in de Zuidstraat.}}$

57 (a) $\boxed{(16,\ 22,\ 22,\ 40)}$

(b) De onbekenden:

x_1 : Aantal insecten aanvankelijk in kamer 1
x_2 : Aantal insecten aanvankelijk in kamer 2
x_3 : Aantal insecten aanvankelijk in kamer 3
x_4 : Aantal insecten aanvankelijk in kamer 4.

Hier is de uitgebreide matrix.

$$\begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \\ 0.4 & 0 & 0 & 0.2 & 12 \\ 0 & 0.4 & 0.3 & 0.2 & 25 \\ 0 & 0.3 & 0.4 & 0.2 & 26 \\ 0.6 & 0.3 & 0.3 & 0.4 & 37 \end{array}$$

De oplossing: $\boxed{(10,\ 20,\ 30,\ 40)}$.

(c) De som van de coëfficiënten *in elke kolom* is gelijk aan 1.

Bijvoorbeeld in de eerste kolom: 40 % van de insecten uit kamer 1 blijft in kamer 1 en 60 % van de insecten gaan naar kamer 4, samen is dit 100 % van de aanvankelijke bewoners van kamer 1.

In elke kolom staan de procenten van de oorspronkelijke bewoners die blijven of verhuizen, samen moet je steeds 100 % van de oorspronkelijk bewoners hebben.

58 Het stelsel:

$$\begin{cases} 30x + 20y = 4000 \\ 2x + y = 220 \end{cases}$$

De oplossing: $\boxed{(40, 140)}$.

$\boxed{59}$ De drie onbekenden (x, y en z) zijn het aantal liter van elk yoghurt-mengsel.

Als het bedrijf x liter Limoen-Appelsienmengsel, y liter Limoen-Citroenmengsel en z liter Appelsien-Citroenmengsel wil maken, heeft het $2x+3y$ kwart liter limoenyoghurt nodig.

Er is in totaal 800 kwart liter limoenyoghurt beschikbaar. Er moet worden voldaan aan de volgende voorwaarde

gebruikte hoeveelheid = beschikbare hoeveelheid.

Dit geeft de vergelijking

$$2x+3y=800.$$

	Limoen Appelsien (x)	Limoen Citroen (y)	Appelsien Citroen (z)	Beschikbaar (kwart l)
limoen (kwart l)	2	3	0	800
appelsien (kwart l)	2	0	3	650
citroen (kwart l)	0	1	1	350

Hier is de uitgebreide matrix van het stelsel.

$$\begin{array}{ccc|c} x & y & z & \\ \hline 2 & 3 & 0 & 800 \\ 2 & 0 & 3 & 650 \\ 0 & 1 & 1 & 350 \end{array} \xrightarrow{\text{rref}} \begin{array}{ccc|c} x & y & z & \\ \hline 1 & 0 & 0 & 100 \\ 0 & 1 & 0 & 200 \\ 0 & 0 & 1 & 150 \end{array}$$

De oplossing: $\boxed{(100, 200, 150)}$.

Het bedrijf moet dus 100 liter Limoen-Appelsienmengsel, 200 liter Limoen-Citroenmengsel en 150 liter Appelsien-Citroenmengsel produceren.

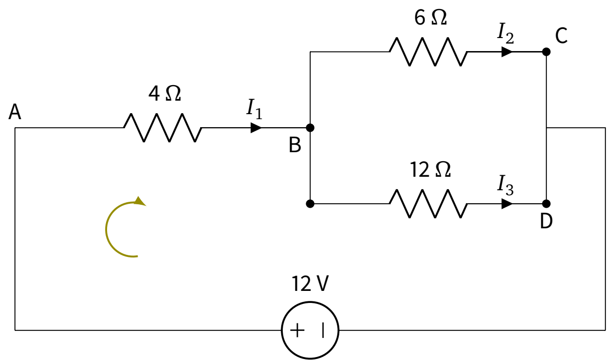
Samen is dit $100+200+150=450$ liter yoghurtmengsels.

De beschikbare voorraad bedraagt $800+650+350=1800$ kwart liter of $\frac{1800}{4}=450$ liter yoghurt.

De hele voorraad is dus opgebruikt.

Merk op dat de som van elke kolom gelijk is aan 4. Inderdaad, om 1 liter mengsel te maken is in totaal 4 kwart liter yoghurt nodig.

61



Bereken de stromen door middel van een gepast stelsel.

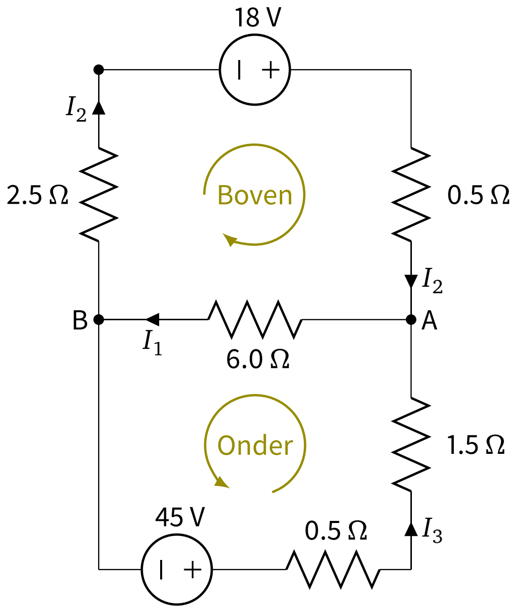
$$\begin{cases} 12-4I_1-6I_1=0 & \text{(in kring ABC)} \\ 12-4I_1-12I_2=0 & \text{(in kring ABD)} \\ I_1=I_2+I_3=0 & \text{(in B)} \end{cases}$$

$\boxed{I_1 = \ 1.5\text{ A}}$

$\boxed{I_2 = \ 1\ \text{ A}}$

$\boxed{I_3 = \ 0.5\text{ A}}$

62



Bereken de stromen door middel van een gepast stelsel.

$$\begin{cases} I_2+I_3=I_1 & \text{(in knooppunt A)} \\ 18-(0.5+2.5)I_2-6I_1=0 & \text{(in kring boven)} \\ 45-(0.5+1.5)I_3-6I_1=0 & \text{(in kring onder)} \end{cases}$$

$\boxed{I_1 = \ 4.75\text{ A}}$

$\boxed{I_2 = \text{-}3.50\text{ A}}$

$\boxed{I_3 = \ 8.25\text{ A}}$