Financiële algebra – Woonkrediet

Wilfried Van Hirtum

Versie 1.00
16 november 2009

Bronvermelding

De figuur op de titelpagina is met dank ontleend aan:

http://www.hypotheekonline.be/

Voorwoord

I've learned it's always better
to have a small percentage of a big success,
than a hundred percent of nothing.

— Art Linkletter

Een huis kopen is een van de (financieel) belangrijkere momenten in iemands leven. Meestal gebeurt dit als men nog vrij jong is en nog geen grote spaarpot heeft. Lenen is dan noodzakelijk. Dergelijke leningen worden afgelost met een reeks van gelijke maandelijkse betalingen, die men *mensualiteit* noemt. Omdat het over grote bedragen gaat, is de looptijd van zo'n lening gepland over een lange periode, bijvoorbeeld vijftien jaar.

Door de maandelijkse betalingen los je stilaan beetje bij beetje het geleende bedrag af. In het begin betaal je dan vooral veel intrest. Maar naar gelang de maanden verstrijken heb je meer en meer kapitaal afgelost en daalt het intrestbestanddeel. Dit is heel typisch voor een mensualiteitenlening: het intrestdeel daalt, en de kapitaalaflossing stijgt.

Bij woonkredieten is er een belastingvoordeel: de intresten kun je aftrekken van het belastbaar inkomen.

Omdat woonkredieten over een lange periode lopen, is het ook nodig om een schuldsaldoverzekering af te sluiten. Dergelijke lening garandeert het terugbetalen van het uitstaande saldo bij vroegtijdig overlijden.

Je leert in dit hoofdstuk mensualiteiten berekenen en een aflossingsplan van een lening opstellen.

Tussen de tekst en achter elk hoofdstukje staan heel wat opdrachten die je zelfstandig moet kunnen uitvoeren als je de tekst aandachtig leest. Om jezelf te controleren staan de oplossingen van de opdrachten achteraan verzameld.

Veel wiskundeplezier met deze cursus.

Wilfried Van Hirtum

Inhoudsopgave

1 Kerk Tsjechië waarschuwt tegen leningen

Kerk Tsjechië waarschuwt tegen leningen

WO 30 nov 2005 10.38

De Rooms-Katholieke Kerk in Tsjechië heeft de bevolking van dat land dinsdag ernstig gewaarschuwd tegen makkelijke geldleningen voor 'onnodige dingen'. Dat meldt het persbureau Reuters. "De wens om onmiddelijk alles te kunnen kopen om hetzelfde te hebben als de buren, is niet de weg naar geluk", zei bisschop Vaclav Maly in een verklaring.

Tijdens het voormalige communistische regime waren de Tsjechen niet gewend geld te lenen. Nu bieden banken en andere financiële bedrijven echter 'makkelijke' leningen aan om de bevolking te helpen de dure Kerstmaand en vakanties te betalen.

"Je eigen beslissingen overdenken, niet alleen op het economische vlak, is een teken van volwassenheid", aldus de katholieken. Volgens bisschop Maly zijn er sinds 2002 circa 200 000 Tsjechische families failliet gegaan door (te) makkelijke geldleningen.

Bron: IKON

2 Woonkrediet

Met de term *woonkrediet* wordt bedoeld, een hypothecair krediet waarvan het kapitaal wordt aangewend om een woning te bouwen, te kopen of te verbouwen. Ook voor de aankoop van een bouwgrond die gefinancierd wordt via een hypothecair krediet, spreekt men meestal van een 'woonkrediet'. Woonkredieten kunnen in één adem genoemd worden met twee andere soorten kredieten, namelijk de 'lening op afbetaling' [1] en'investeringskrediet' [2]

Wat is een hypothecair krediet?

Een hypothecair krediet is een krediet waarvan de terugbetaling van het kapitaal gewaarborgd is door een hypotheek[3] op een onroerend goed.

[1] Een 'lening op afbetaling' gebruik je voor allerlei *diverse doeleinden*, bijvoorbeeld voor de aankoop van een wagen, voor de aankoop van meubelen, voor de aankoop van een computer, enzovoort. Heel vaak wordt ook de aankoop van een bouwgrond gefinancierd via een lening op afbetaling: daardoor kunnen de kosten van een hypotheek bespaard worden en de afbetaling kan gebeuren over een vrij korte periode.

Een lening op afbetaling heeft meestal een *korte* looptijd, bijvoorbeeld drie jaar. Een woonkrediet daarentegen heeft een langere looptijd, bijvoorbeeld vijftien jaar.

[2] Met de term 'investeringskrediet' wordt een krediet bedoeld dat wordt aangegaan door een zelfstandige of een onderneming met de bedoeling om het opgenomen kapitaal te investeren in het bedrijf of in de activiteiten van het bedrijf.

[3] De akte met de vermelding van de gegevens van het krediet moet opgemaakt worden door een notaris. Dit kost uiteraard geld. Deze registratierechten noemt men in de volksmond het 'groot beschrijf'(10 % van de aankoopprijs) of het 'klein beschrijf'(5 %) voor bescheiden woningen.

Figuur 1 Bouwen kost veel geld. Meestal gaat men een hypothecaire lening aan.

Wat is een hypotheek?

Een hypotheek is een waarborg, een garantie voor een kredietgever of een schuldeiser. Een krediet dat wordt aangegaan om een woning of een ander onroerend goed aan te kopen, is meestal een project over een langere termijn.

Gedurende de looptijd van het krediet kan er veel gebeuren. Als bescherming tegen allerlei onverwachte gebeurtenissen die zich kunnen voordoen, zal de kredietgever 'een hypotheek nemen' op de aangekochte woning of op het aangekochte onroerend goed.

De hypotheek geeft aan de kredietgever het recht om de woning of het onroerend goed openbaar te laten verkopen indien de kredietnemer niet terugbetaalt zoals was afgesproken. Bovendien geeft de hypotheek aan de kredietgever het recht om de opbrengst van de verkoop in de eerste plaats te gebruiken om de schulden van de kredietnemer aan te zuiveren.

Of met andere woorden: de waarborg van de kredietgever is het recht dat hij heeft om het gehypothekeerde goed te laten verkopen.

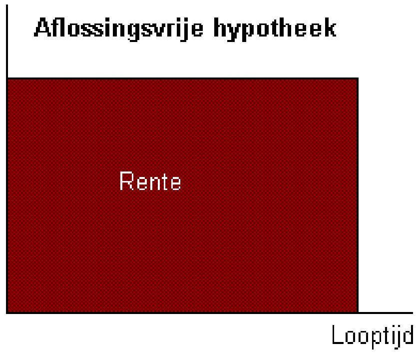
Wat zijn de voorwaarden om een hypothecair krediet aan te gaan?

- Het ontleende kapitaal moet dienen om onroerend goed te kopen, te bouwen of te verbouwen.
- Het geleende bedrag mag de (door de bank geschatte) waarde van de woning niet overschrijden.
- De terugbetalingen mogen niet meer dan een derde van het gezinsinkomen overschrijden.
- De financiële instelling raadpleegt de Centrale voor Uitwisseling van Gegevens over het Risico. Deze centrale houdt gegevens bij met betrekking tot betalingsachterstanden die de cliënt heeft bij andere kredieten en eventuele faillisementen en protesten.

Welke schuldaflossingen zijn er mogelijk bij hypothecair krediet?

- Aflossingsvrije hypotheeklening

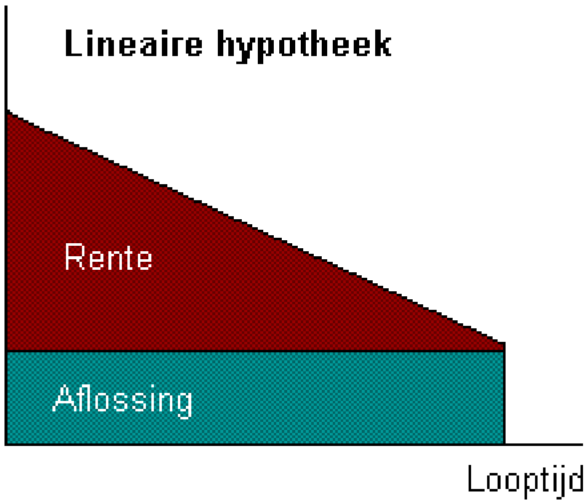
  Bij deze hypotheekvorm los je gedurende de looptijd *niets* af. Je betaalt uitsluitend rente over het geleende bedrag. Aan het eind van de looptijd los je de hypotheek in één keer af, of je sluit een nieuwe hypotheek af. De maandlast blijft *gelijk*, maar bevat alleen maar intrest. Zie figuur 2.



Figuur 2 Aflossingsvrije hypotheeklening. Vaste maandlast, die enkel bestaat uit intrest. Aflossing in één keer op het einde.

- Lineaire hypotheeklening

  Je lost iedere maand een *vast gelijk bedrag* af. De schuld, en daarmee ook de te betalen rente, wordt hierdoor elke maand geleidelijk kleiner. Dit kun je zien in de grafiek aan de schuine (rechte!) lijn. De totale maandlast (gelijke kapitaaldelen, maar kleiner wordende intrest) wordt dus iedere maand *kleiner*. Zie figuur **??**.



Figuur 3 Lineaire hypotheeklening. Maandlast wordt kleiner: gelijke kapitaalaflossingen, maar kleiner wordende rente.

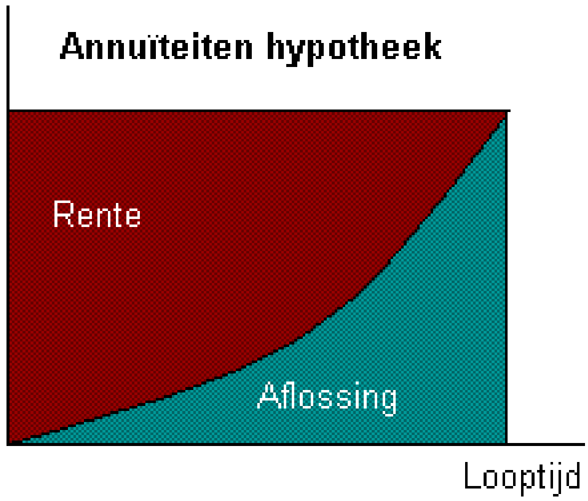
- Lening met een mensualiteit

> Een *annuïteit* is een rij van gelijke, periodieke stortingen.
>
> Als deze stortingen maandelijks gebeuren, spreekt men van een *mensualiteit*.

De meest gebruikte manier van terugbetalen bestaat uit een mensualiteit. Gedurende de hele looptijd betaal je maandelijks *hetzelfde bedrag*, dat voor een deel uit intrest bestaat en voor een deel uit aflossing.

In het begin betaal je veel intrest en naar het einde toe betaal je vooral kapitaal af, maar het maandelijkse bedrag (intrest+kapitaalaflossing) blijft hetzelfde. Op het einde is de hypotheek afgebetaald.

Zie figuur 4.



Figuur 4 Hypotheeklening met mensualiteiten. Vaste maandlast: kleiner wordende rente, groter wordende kapitaalaflossingen.

3 Aflossingstabel

In tabel 1 kun je een voorbeeld zien van een aflossingstabel.

De gegevens voor deze lening zijn:

- Krediet van 12 500 euro.
- De looptijd van het krediet is 3 jaar[4].
- De jaarrentevoet bedraagt 5 %.
- Het krediet is terugbetaalbaar via een mensualiteit.
- Het krediet werd afgesloten op 14 februari 2005.

Tabel 1 Aflossingstabel van een mensualiteitenlening

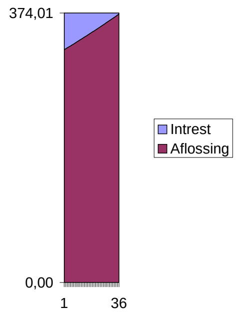
Maand	Vervaldag	Maandlast	Intrest	Aflossing	Saldo Kapitaal
1	14-mrt-2005	374,01	50,93	323,08	12 176,92
2	14-apr-2005	374,01	49,61	324,40	11 852,52
3	14-mei-2005	374,01	48,29	325,72	11 526,80
4	14-jun-2005	374,01	46,96	327,05	11 199,75
5	14-jul-2005	374,01	45,63	328,38	10 871,37
6	14-aug-2005	374,01	44,29	329,72	10 541,65
7	14-sep-2005	374,01	42,95	331,06	10 210,59
8	14-okt-2005	374,01	41,60	332,41	9 878,18
9	14-nov-2005	374,01	40,24	333,77	9 544,41
10	14-dec-2005	374,01	38,89	335,12	9 209,29
11	14-jan-2006	374,01	37,52	336,49	8 872,80
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
35	14-jan-2008	374,01	3,03	370,98	372,63
36	14-feb-2008	374,01	1,38	372,63	0
Totaal		13 464,36	964,36	12 500	

Uit de tabel blijkt dat naargelang de tijd verstrijkt er minder en minder intrest moet betaald worden. Tegelijk los je elke maand meer en meer kapitaal af. Deze tendensen kun je ook zien op de grafiek in figuur 5.

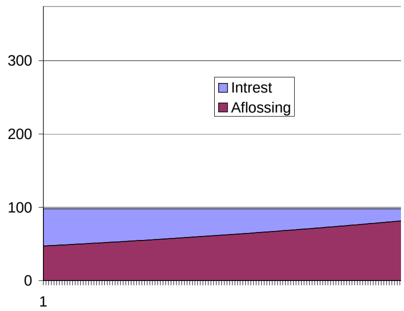
Bij een lening met langere looptijd zie je dit nog duidelijker. Zie figuur 6. De looptijd van de lening is langer. Daardoor is de maandlast kleiner, maar de intresten blijven hetzelfde, je kunt dus maandelijks minder aflossen in het begin. Pas tegen het einde van de lening dalen de intresten meer en daardoor kun je meer aflossen.

In tabel 2 zie je de bijhorende aflossingstabel met een looptijd van vijftien jaar.

[4]Een looptijd van drie jaar is *niet* typisch voor een hypotheeklening. We doen de berekening hier alleen maar als voorbeeld.



Figuur 5 Lening met vaste maandlast: intrest daalt, aflossing stijgt.



Figuur 6 Lening met vaste maandlast en met een looptijd van 15 jaar: intrest daalt, aflossing stijgt.

In beide tabellen is er één enkel bedrag hetzelfde, namelijk de intrest die je op het einde van de eerste maand betaalt: 50,93 euro. Bij de lening met een looptijd van vijftien jaar betaal je in het begin meer intrest dan kapitaalaflossing: 50,93 euro intrest tegenover 47,20 euro kapitaalaflossing. Tegen het einde van de lening mindert de intrest en stijgt de aflossing. Op het einde van de laatste maand betaal je maar 0,39 euro intrest tegenover 97,74 euro kapitaalaflossing.

Merk ook op dat in het geval van de lange looptijd van vijftien jaar zeer veel intresten betaald worden: 5 162,55 euro. Je betaalt bijna de helft van het geleende bedrag(12 500 euro) aan intresten. Daarbij komen nog de registratierechten (10 % of 5 %) en de premies van de schuldsaldoverzekering. In het geval van de korte looptijd van drie jaar betaal je maar 964,36 euro aan intresten.

3.1 De aflossingstabel berekenen

We nemen als voorbeeld de gegevens uit tabel 2 op pagina 11.

Tabel 2 Aflossingstabel van een mensualiteitenlening

Maand	Vervaldag	Maandlast	Intrest	Aflossing	Saldo Kapitaal
1	14-mrt-2005	98,13	50,93	47,20	12 452,80
2	14-apr-2005	98,13	50,73	47,40	12 405,40
3	14-mei-2005	98,13	50,54	47,59	12 357,81
4	14-jun-2005	98,13	50,35	47,78	12 310,03
5	14-jul-2005	98,13	50,15	47,98	12 262,05
6	14-aug-2005	98,13	49,96	48,17	12 213,88
7	14-sep-2005	98,13	49,76	48,37	12 165,51
8	14-okt-2005	98,13	49,56	48,57	12 116,94
9	14-nov-2005	98,13	49,36	48,77	12 068,17
10	14-dec-2005	98,13	49,17	48,96	12 019,21
11	14-jan-2006	98,13	48,97	49,16	11 970,05
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
174	14-aug-2019	98,13	2,75	95,38	579,65
175	14-sep-2019	98,13	2,36	95,77	483,88
176	14-okt-2019	98,13	1,97	96,16	387,72
177	14-nov-2019	98,13	1,58	96,55	291,17
178	14-dec-2019	98,13	1,19	96,94	194,23
179	14-jan-2020	98,13	0,79	97,34	96,89
180	14-feb-2020	98,13	0,39	97,74	-0,85
Totaal		17 663,40	5 162,55	12 500,85	

Maandelijkse rentevoet berekenen

We moeten eerst de maandelijkse rentevoet berekenen. Dit gaat in vier stappen:

$$\begin{aligned} Jaarlijkse\ rentevoet &= 0,05 \\ Jaarlijkse\ rentefactor &= 1,05 \\ Maandelijkse\ rentefactor &= \sqrt[12]{1,05} = 1,004074 \\ Maandelijkse\ rentevoet &= 0,004074 = 0,4074\,\% \end{aligned} \tag{1}$$

Maand 1

In het begin is er een schuldsaldo van 12 500 euro: het geleend kapitaal. Op het einde van de eerste maand (14 maart 2005) gebeurt de eerste betaling van 98,13 euro. Een deel is intrest, en de rest is aflossing.

De intrest bedraagt:

$$Intrest = 12\,500 \times 0,004074 = 50{,}93 \text{ euro}$$

Voor een eerste aflossing van de schuld rest er nog:

$$Aflossing = 98,13 - 50,93 = 47{,}20 \text{ euro}$$

Het schuldsaldo is nu verminderd tot:

$$Schuldsaldo = 12\,500 - 47,20 = 12\,452{,}80 \text{ euro}$$

Maand 2

Het schuldsaldo bedraagt nu 12 452,80 euro: zoveel moet je nog aflossen. Op het einde van de tweede maand (14 april 2005) gebeurt de tweede betaling van 98,13 euro. Een deel is weer intrest, maar minder dan voor de eerste maand, omdat het schuldsaldo kleiner is. De rest is voor een tweede aflossing, dat nu iets groter is dan de vorige aflossing.

De intrest bedraagt:

$$Intrest = 12\,452,80 \times 0,004074 = 50{,}73 \text{ euro}$$

Voor een twee aflossing van de schuld rest er nog:

$$Aflossing = 98,13 - 50,73 = 47{,}40 \text{ euro}$$

Het schuldsaldo is nu verminderd tot:

$$Schuldsaldo = 12\,452,80 - 47,40 = 12\,405{,}40 \text{ euro}$$

De berekeningen voor de volgende maanden verlopen op gelijkaardige wijze.

In de loop van de maanden zie je het intrestdeel van de maandlast *dalen*. Inderdaad, omdat het schuldsaldo daalt moet je steeds minder intrest betalen.

Tegelijk stijgt in de loop van de maanden het aflossingsdeel. Inderdaad, omdat je steeds minder intrest betaalt, rest er meer om te kunnen aflossen.

De totale maandlast (intrest+aflossing) blijft constant gedurende de hele looptijd van de lening.

Maand 179 - einde van de afbetaling

Er is nog een schuldsaldo van 96,89 euro op het einde van de 179ste maand. Op het einde van de 180ste maand gebeurt de laatste betaling van 98,13 euro.

De intrest bedraagt:

$$Intrest = 96,89 \times 0,004074 = 0{,}39 \text{ euro}$$

Voor de laatste kapitaalaflossing rest er nog:

$$Aflossing = 98,13 - 0,39 = 97{,}74 \text{ euro}$$

Het schuldsaldo is nu verminderd tot:

$$Schuldsaldo = 96,89 - 97,74 = \text{-}0{,}85 \text{ euro}$$

Dit schuldsaldo zou moeten gelijk zijn aan 0 euro, maar door het opstapelen van afrondingen bij de tussentijdse berekeningen is het schuldsaldo nog -85 cent.

Dit schuldsaldootje is negatief. De bank moet jou dus nog 85 cent betalen.

Het schuldsaldo is nu 0 euro: de lening is dus afbetaald.

Kostprijs van de lening

Je hebt in totaal 180 maandelijkse betalingen gedaan van 98,13 euro en 0,85 euro teruggetrokken. Dit geeft in totaal 17 662,55 euro. Dit is uiteraard meer dan het geleende bedrag van 12 500 euro.

Het verschil is 5 162,55 euro. Dit is het totaal aan intresten dat je betaald hebt.

De lening heeft dus 5 162,55 euro gekost, in het voordeel van de bank.

De eigenlijke kostprijs van de lening is nog groter. Bij het afsluiten van de hypothecaire lening heb je bij de notaris registratierechten moeten betalen: 10 % van het geleende bedrag (5 % voor 'klein beschrijf'):

$$Notariskosten = 12\,500 \times 0,10 = 1\,250 \text{ euro}$$

Bovendien heb je ook nog gedurende de looptijd van de lening premies betaald voor de schuldsaldoverzekering.

Je hebt dus al minstens 5 162,55 euro + 1 250 euro = 6 412,55 euro betaald aan intresten en registratierechten samen, om een bedrag te lenen van 12 500 euro.

Lenen kost dus geld!

Om dit leed te verzachten is er wel een belastingvoordeel: intresten kun je aftrekken van het belastbaar inkomen en in sommige gevallen kunnen kapitaalaflossingen ook afgetrokken worden.

Documentatie en berekeningen op het internet

1 Bezoek de website `www.bouwsite.be`. Kies voor `Bouwgids` en verder voor `De financiering`. Hier kun je nog uitgebreide informatie vinden over hypothecaire leningen en alles wat er mee te maken heeft.

Bij sommige banken kun je een aflossingstabel laten uitrekenen op hun website.

2 Bezoek bijvoorbeeld de website:

`www.axa.be`

Kies voor `Kredieten Woonkrediet`

Klik op de knop `Simulatie`.

Kies voor `Bereken uw afbetaling: met vaste bedragen`.

Je kunt nu zelf het geleende bedrag, de looptijd en de rentevoet invullen.

Daarna wordt het maandbedrag berekend en je kunt de aflossingstabel gedeeltelijk bekijken.

3 Vul de volgende aflossingstabel (zie tabel 3) in voor de eerste zes maanden en voor de laatste drie maanden.

Gegeven:

- Geleend bedrag: 45 000 euro
- Jaarlijkse rentevoet: 3,75 %
- Looptijd: 10 jaar
- Maandlast: 448,95 euro
- Begindatum: 1 april 2005

Tabel 3 Aflossingstabel van een mensualiteitenlening

Maand	Vervaldag	Maandlast	Intrest	Aflossing	Saldo Kapitaal
1	01-mei-2005				
2	01-jun-2005				
3	01-jul-2005				
4	01-aug-2005				
5	01-sep-2005				
6	01-okt-2005				
7	01-nov-2005	448,95	132,51	316,44	42 805,19
8	01-dec-2005	448,95	131,54	317,41	42 487,78
9	01-jan-2006	448,95	130,56	318,39	42 169,39
10	01-feb-2006	448,95	129,59	319,36	41 850,03
⋮	⋮ ⋮	⋮	⋮	⋮	
19	01-nov-2006	448,95	120,64	328,31	38 931,22
20	01-dec-2006	448,95	119,64	329,31	38 601,91
⋮	⋮ ⋮	⋮	⋮	⋮	
116	01-dec-14	448,95	6,84	442,11	1 782,27
117	01-jan-15	448,95	5,48	443,47	1 338,80
118	01-feb-15				
119	01-mrt-15				
120	01-apr-15				
Totaal		53 874,00	8 874,19	44 999,81	

4 Vul de volgende aflossingstabel (zie tabel 4) in voor de 15 jaren van de lening.

Gegeven:

- Geleend bedrag: 75 000 euro
- Jaarlijkse rentevoet: 4,25 %
- Looptijd: 15 jaar
- Jaarlijks te betalen: 6 864,03 euro
- Begindatum: 10 mei 2005

Tabel 4 Aflossingstabel van een annuïteitenlening

Jaar	Vervaldag	Jaarlast	Intrest	Aflossing	Saldo Kapitaal
1	10-jun-2006				
2	10-jun-2007				
3	10-jun-2008				
4	10-jun-2009				
5	10-jun-2010				
6	10-jun-2011				
7	10-jun-2012				
8	10-jun-2013				
9	10-jun-2014				
10	10-jun-2015				
11	10-jun-2016				
12	10-jun-2017				
13	10-jun-2018				
14	10-jun-2019				
15	10-jun-2020				
Totaal					
Kostprijs	van de	lening:			

4 De maandlast berekenen

Als je een bepaald bedrag wil lenen, bijvoorbeeld 12 500 euro tegen bijvoorbeeld 5 % gedurende bijvoorbeeld 15 jaar, wil je natuurlijk weten hoeveel de maandlast bedraagt.

Soms wil je ook het omgekeerde kunnen berekenen. Bijvoorbeeld: je wil gedurende 15 jaar maandelijks 500 euro betalen, hoeveel kun je dan lenen tegen bijvoorbeeld 4 %?

In de volgende paragrafen zoeken we de formules die nodig zijn voor dergelijke berekeningen.

4.1 De eindwaarde van een annuïteit

Een voorbeeld

Stel dat je gedurende 5 jaar elk jaar een vast bedrag van 500 euro betaalt aan de bank waar je een lening aangaat, dan kan de bank dit bedrag beleggen tegen een rentevoet van 4 %.

> Hoeveel is deze annuïteit dan *waard* na 5 jaar?

De eerste betaling van 500 euro gebeurt op het *einde* van het eerste jaar en kan dus gedurende 4 jaar belegd worden. De eindewaarde van deze betaling op het einde van het vijfde jaar is:

$$500 \times 1,04^4 = 584{,}93 \text{ euro}$$

De tweede betaling van 500 euro wordt pas gestort op het einde van het tweede jaar en kan dus maar gedurende 3 jaar belegd worden. De eindwaarde op het einde van het vijfde jaar is:

$$500 \times 1,04^3 = 562{,}43 \text{ euro}$$

De eindwaarde van de derde betaling van 500 euro is:

$$500 \times 1,04^2 = 540{,}80 \text{ euro}$$

De eindwaarde van de vierde betaling is:

$$500 \times 1,04 = 520{,}00 \text{ euro}$$

De vijfde en laatste betaling wordt op het einde van het vijfde jaar verricht en kan *niet* meer belegd worden. De eindwaarde van deze laatste betaling is 500 euro zelf:

$$500 \text{ euro}$$

Tabel 5 Eindwaarde van een annuïteit

0	1	2	3	4	5
	500 $\xrightarrow{\times 1{,}04^4}$				$\boxed{584{,}93 \text{ euro}}$
		500 $\xrightarrow{\times 1{,}04^3}$			$\boxed{562{,}43 \text{ euro}}$
			500 $\xrightarrow{\times 1{,}04^2}$		$\boxed{540{,}80 \text{ euro}}$
				500 $\xrightarrow{\times 1{,}04}$	$\boxed{520{,}00 \text{ euro}}$
					$\boxed{500{,}00 \text{ euro}}$
	Totaal:				**2,708,16 euro**

Schematisch:

Er bestaat een manier om deze eindwaarde *direct* te berekenen, *zonder* het hele schema te moeten berekenen.

In formulevorm:

$$\begin{aligned} Eindwaarde &= 500 \times 1,04^4 + 500 \times 1,04^3 + 500 \times 1,04^2 + 500 \times 1,04 + 500 \\ &= 500 \times (1,04^4 + 1,04^3 + 1,04^2 + 1,04 + 1) && (2) \\ &= 500 \times \frac{1,04^5 - 1}{1,04 - 1} && (3) \end{aligned}$$

Voor de overgang van formule 2 naar formule 3 gebruiken we de volgende formule:

$$1,04^4 + 1,04^3 + 1,04^2 + 1,04 + 1 = \frac{1,04^5 - 1}{1,04 - 1} \tag{4}$$

Zie appendix A voor de afleiding van deze formule.

Algemeen:

De eindwaarde A van een annuïteit (een serie van n betalingen van a euro tegen een rentefactor u is:

$$A = a \times \frac{u^n - 1}{u - 1} \tag{5}$$

We passen dit toe op het vorige voorbeeld (5 jaarlijkse betalingen van -euro500 met een rentevoet van 4 %).

$$\begin{aligned} A &= a \times \frac{u^n - 1}{u - 1} \\ &= 500 \times \frac{1,04^5 - 1}{1,04 - 1} \\ &= 2\,708,16 \end{aligned}$$

De eindwaarde is dus 2 708,16 euro. Vergelijk met tabel 5 op pagina 17.

4.2 Het geleend bedrag berekenen uit de annuïteit

We rekenen voort met het vorige voorbeeld (5 jaarlijkse betalingen van 500 euro met een rentevoet van 4 %). De eindwaarde is 2 708,16 euro.

Het geleende bedrag L (dat we nog niet kennen) kan ook belegd worden, en nog wel gedurende de hele looptijd van de lening (vijf jaar dus). De *eindwaarde van het geleende bedrag* is:

$$L \times 1,04^5 \tag{6}$$

De eindwaarde van het geleende bedrag L moet *gelijk* zijn aan de eindwaarde van de vijf jaarlijkse betalingen van 500 euro:

$$L \times 1,04^5 = A$$

Hieruit kunnen we het geleende bedrag L berekenen:

$$L = \frac{A}{1,04^5} = \frac{2\,708,16}{1,04^5} = 2\,225{,}91 \text{ euro}$$

Besluit: met vijf jaarlijkse betalingen van 500 euro kan een bedrag van 2 225,91 euro geleend worden.

We hebben dus in het algemeen:

$$L = \frac{A}{u^n} \tag{7}$$

We kunnen dit bedrag *direct* berekenen, vertrekkende van het maandbedrag a:

We vullen de formule voor de eindwaarde A uit formule 5 op pagina 17 in formule 7 in en krijgen dan:

$$L = \frac{a \times \frac{u^n - 1}{u - 1}}{u^n}$$

Het geleende bedrag L van een annuïteitenlening met n betalingen van a euro tegen een rentefactor u is:

$$L = \frac{a \times \frac{u^n - 1}{u - 1}}{u^n} \tag{8}$$

Opmerking: je kunt L ook de *beginwaarde* van de annuïteit noemen.

4.3 Het termijnbedrag van een annuïteitenlening berekenen

Uit formule 8 volgt:

> Het termijnbedrag a van een annuïteitenlening van n betalingen tegen een rentefactor u is:
>
> $$a = L \times u^n \times \frac{u-1}{u^n-1} \tag{9}$$
>
> Hierbij is L het geleend bedrag.

Voorbeeld

Hoeveel moet je jaarlijks betalen gedurende 15 jaar als je 12 500 euro leent tegen een rentevoet van 5 % per jaar?

- $L = 12\,500$ euro
- $n = 15$ (jaar)
- $i = 5\,\%$ (per jaar) en dus $u = 1,05$

Het termijnbedrag a is dus:

$$\begin{aligned} a &= 12\,500 \times 1,05^{15} \times \frac{1,05-1}{1,05^{15}-1} \\ &= 1\,204{,}28 \text{ euro} \end{aligned}$$

Hoeveel moet je *maandelijks* betalen gedurende 15 jaar als je 12 500 euro leent tegen een rentevoet van 5 % per jaar?

Je berekent eerst de maandelijkse rentefactor u_{12}:

$$u_{12} = \sqrt[12]{1,05} = 1,004074$$

- $L = 12\,500$ euro
- $n = 15 \times 12 = 180$ (maanden)
- $u_{12} = 1,004074$

Het termijnbedrag a is dus:

$$\begin{aligned} a &= 12\,500 \times 1,004074^{180} \times \frac{1,004074-1}{1,004074^{180}-1} \\ &= 98{,}13 \text{ euro} \end{aligned}$$

Vergelijk nu deze twee voorbeelden met elkaar.

Merk op dat het totaal van twaalf maandelijkse betalingen van 98,13 euro ($12 \times 98,13 =$ 1 177,56 euro) *kleiner* is dan een enkele jaarlijkse betaling van 1 204,28 euro.

Immers bij maandelijkse betalingen gebeurt de aflossing *vroeger* en betaal je dus *minder intresten.*

Besluit: als je een bedrag van 12 500 euro leent tegen een rentevoet van 5 % per jaar, moet je gedurende 15 jaar maandelijks 98,13 euro betalen. Zie ook aflossingstabel 2 pagina 11.

5 Opdrachten

5 Bereken de eindwaarde van een mensualiteit met maandelijkse termijnbedragen van 150 euro met een looptijd van 12 jaar tegen 3,75 %.

6 Bereken de eindwaarde van een annuïteit met twintig jaarlijkse termijnbedragen van 255 euro tegen 4 %.

7

1. Welk bedrag moet je jaarlijks op het einde van het jaar sparen tegen 2,75 % om over tien jaar een stuk bouwgrond te kunnen kopen van 80 000 euro?
2. Zelfde vraag als je maandelijks wil sparen.

8 Een mensualiteit heeft een looptijd van vijftien jaar en een maandelijks termijnbedrag van 112 euro tegen 4,35 %. Welk bedrag kun je lenen?

9 Je wilt gedurende tien jaar op het einde van elk jaar 1 350 euro afbetalen tegen 2,75 % om een annuïteitenlening af te betalen. Hoeveel kun je lenen?

10 Je wilt een bedrag lenen van 35 000 euro tegen 5,25 %.

1. Hoeveel moet je maandelijks betalen als je deze lening wil aflossen in tien jaar?
2. Zelfde vraag, in vijftien jaar.
3. Zelfde vraag, in twintig jaar.
4. Zelfde vraag, in vijfentwintig jaar.

Bereken ook hoeveel intresten je telkens in totaal betaalt.

11 Je hebt op 1 maart 2005 een lening aangegaan van 15 000 euro met een looptijd van tien jaar tegen een rentevoet van 5,90 %. Je lost de lening af met jaarlijkse termijnbedragen.

1. Bepaal het jaarlijkse termijnbedrag.
2. Stel de aflossingstabel op.

12 Je moet elke maand 400 euro huishuur betalen.

Als je datzelfde bedrag zou besteden aan een lening, welk bedrag zou je dan kunnen lenen om een huis te kopen als je de mensualiteitenlening wilt afbetalen over een looptijd van 15 jaar tegen 5 %?

A Som van opeenvolgende machten

Op pagina 17 gebruiken we formule 4 voor het berekenen van een som van opeenvolgende machten van 1,04.

$$1,04^4 + 1,04^3 + 1,04^2 + 1,04 + 1 = \frac{1,04^5 - 1}{1,04 - 1}$$

Deze formule is gebaseerd op de volgende vermenigvuldiging:

$$(1,04^4 + 1,04^3 + 1,04^2 + 1,04 + 1) \times (1,04 - 1)$$

We werken de haakjes uit:

$$\begin{aligned} &= (1,04^4 + 1,04^3 + 1,04^2 + 1,04 + 1) \times 1,04 \\ &\quad -(1,04^4 + 1,04^3 + 1,04^2 + 1,04 + 1) \\ &= 1,04^5 + \cancel{1,04^4} + \cancel{1,04^3} + \cancel{1,04^2} + \cancel{1,04} \\ &\quad -\cancel{1,04^4} - \cancel{1,04^3} - \cancel{1,04^2} - \cancel{1,04} - 1 \\ &= 1,04^5 - 1 \end{aligned}$$

Dus:

$$(1,04^4 + 1,04^3 + 1,04^2 + 1,04 + 1) \times (1,04 - 1) = 1,04^5 - 1$$

En dus:

$$1,04^4 + 1,04^3 + 1,04^2 + 1,04 + 1 = \frac{1,04^5 - 1}{1,04 - 1}$$

Zo kom je dus aan deze formule.

Oplossingen van de opdrachten

3 De maandelijkse rentevoet:

$$u_{12} = \sqrt[12]{1,0375} = 1,003073$$

Tabel 6 Aflossingstabel van een mensualiteitenlening

Maand	Vervaldag	Maandlast	Intrest	Aflossing	Saldo Kapitaal
1	01-mei-2005	448,95	138,29	310,66	44 689,34
2	01-jun-2005	448,95	137,33	311,62	44 377,72
3	01-jul-2005	448,95	136,37	312,58	44 065,14
4	01-aug-2005	448,95	135,41	313,54	43 751,60
5	01-sep-2005	448,95	134,45	314,50	43 437,10
6	01-okt-2005	448,95	133,48	315,47	43 121,63
7	01-nov-2005	448,95	132,51	316,44	42 805,19
8	01-dec-2005	448,95	131,54	317,41	42 487,78
⋮	⋮ ⋮	⋮	⋮	⋮	
19	01-nov-2006	448,95	120,64	328,31	38 931,22
20	01-dec-2006	448,95	119,64	329,31	38 601,91
⋮	⋮ ⋮	⋮	⋮	⋮	
116	01-dec-14	448,95	6,84	442,11	1 782,27
117	01-jan-15	448,95	5,48	443,47	1 338,80
118	01-feb-15	448,95	4,11	444,84	893,96
119	01-mrt-15	448,95	2,75	446,20	447,76
120	01-apr-15	448,95	1,38	447,57	0,19
Totaal		53 874	8 874,19	44 999,81	

Tabel 7 Aflossingstabel van een annuïteitenlening

Jaar	Vervaldag	Jaarlast	Intrest	Aflossing	Saldo Kapitaal
1	10-jun-2006	6864,03	3187,50	3676,53	71323,47
2	10-jun-2007	6864,03	3031,25	3832,78	67490,69
3	10-jun-2008	6864,03	2868,35	3995,68	63495,01
4	10-jun-2009	6864,03	2698,54	4165,49	59329,52
5	10-jun-2010	6864,03	2521,50	4342,53	54986,99
6	10-jun-2011	6864,03	2336,95	4527,08	50459,91
7	10-jun-2012	6864,03	2144,55	4719,48	45740,43
8	10-jun-2013	6864,03	1943,97	4920,06	40820,37
9	10-jun-2014	6864,03	1734,87	5129,16	35691,21
10	10-jun-2015	6864,03	1516,88	5347,15	30344,06
11	10-jun-2016	6864,03	1289,62	5574,41	24769,65
12	10-jun-2017	6864,03	1052,71	5811,32	18958,33
13	10-jun-2018	6864,03	805,73	6058,30	12900,03
14	10-jun-2019	6864,03	548,25	6315,78	6584,25
15	10-jun-2020	6864,03	279,83	6584,20	0,05
Totaal		102 960,45	27 960,50	74 999,95	

De kostprijs van de lening bedraagt 27 960,50 euro aan intresten alleen. Daarbij komen nog de registratierechten die 10 % (7 500 euro) of 5 %(3 750 euro) van het geleende bedrag bedragen.

De kostprijs van de lening is dus: 35 460,50 euro in het geval van 'groot beschrijf' of 31 710,50 euro in het geval van 'klein beschrijf'.

5 $u_{12} = \sqrt[12]{1,0375} = 1,003073$

$A = 27\,117{,}96$ euro

6 $A = 7\,593{,}41$ euro

7

1. Jaarlijks termijnbedrag: $a = 7\,059{,}18$ euro
2. Maandelijks termijnbedrag: $a = 580{,}99$ euro Dit is *minder* dan 7,059,18 euro gedeeld door 12 (588,27 euro), omdat eerste de betalingen al beginnen na een maand.

8 Te lenen bedrag: $L = 14\,872{,}09$ euro

9 Te lenen bedrag: $L = 11\,664{,}10$ euro

10

$$u_{12} = \sqrt[12]{1,0525} = 1,004273$$

1. Met een looptijd van 10 jaar: $a = 373{,}42$ euro

   Intresten: 9 810,40 euro
2. Met een looptijd van 15 jaar: $a = 279{,}11$ euro

   Intresten: 15 239,80 euro
3. Met een looptijd van 20 jaar: $a = 233{,}46$ euro

   Intresten: 21 030,40 euro
4. Met een looptijd van 25 jaar: $a = 207{,}22$ euro

   Intresten: 27 166,00 euro

11

$$\begin{aligned} a &= L \times u^n \times \frac{u-1}{u^n-1} \\ &= 15\,000 \times 1,059^{10} \times \frac{0,059}{1,059^{10}-1} \\ &= 2\,028{,}37 \text{ euro} \end{aligned}$$

Tabel 8 Aflossingstabel van een annuïteitenlening

Jaar	Vervaldag	Jaarlast	Intrest	Aflossing	Saldo Kapitaal
1	01-apr-2006	2028,37	885,00	1143,37	13 856,63
2	01-apr-2007	2028,37	817,54	1210,83	12 645,80
3	01-apr-2008	2028,37	746,10	1282,27	11 363,53
4	01-apr-2009	2028,37	670,45	1357,92	10 005,61
5	01-apr-2010	2028,37	590,33	1438,04	8567,57
6	01-apr-2011	2028,37	505,49	1522,88	7044,69
7	01-apr-2012	2028,37	415,64	1612,73	5431,96
8	01-apr-2013	2028,37	320,49	1707,88	3724,08
9	01-apr-2014	2028,37	219,72	1808,65	1915,43
10	01-apr-2015	2028,37	113,01	1915,36	0,07
Totaal		20 283,7	5 283,77	14 999,93	

12 $u_{12} = \sqrt[12]{1,05} = 1,004074$

$L = 50\,954{,}56$ euro

Uitwerkingen van de opdrachten

3 De maandelijkse rentevoet:

$$u_{12} = \sqrt[12]{1,0375} = 1,003073$$

Tabel 9 Aflossingstabel van een mensualiteitenlening

Maand	Vervaldag	Maandlast	Intrest	Aflossing	Saldo Kapitaal
1	01-mei-2005	448,95	138,29	310,66	44 689,34
2	01-jun-2005	448,95	137,33	311,62	44 377,72
3	01-jul-2005	448,95	136,37	312,58	44 065,14
4	01-aug-2005	448,95	135,41	313,54	43 751,60
5	01-sep-2005	448,95	134,45	314,50	43 437,10
6	01-okt-2005	448,95	133,48	315,47	43 121,63
7	01-nov-2005	448,95	132,51	316,44	42 805,19
8	01-dec-2005	448,95	131,54	317,41	42 487,78
⋮	⋮ ⋮	⋮	⋮	⋮	
19	01-nov-2006	448,95	120,64	328,31	38 931,22
20	01-dec-2006	448,95	119,64	329,31	38 601,91
⋮	⋮ ⋮	⋮	⋮	⋮	
116	01-dec-14	448,95	6,84	442,11	1 782,27
117	01-jan-15	448,95	5,48	443,47	1 338,80
118	01-feb-15	448,95	4,11	444,84	893,96
119	01-mrt-15	448,95	2,75	446,20	447,76
120	01-apr-15	448,95	1,38	447,57	0,19
Totaal		53 874	8 874,19	44 999,81	

Tabel 10 Aflossingstabel van een annuïteitenlening

Jaar	Vervaldag	Jaarlast	Intrest	Aflossing	Saldo Kapitaal
1	10-jun-2006	6864,03	3187,50	3676,53	71323,47
2	10-jun-2007	6864,03	3031,25	3832,78	67490,69
3	10-jun-2008	6864,03	2868,35	3995,68	63495,01
4	10-jun-2009	6864,03	2698,54	4165,49	59329,52
5	10-jun-2010	6864,03	2521,50	4342,53	54986,99
6	10-jun-2011	6864,03	2336,95	4527,08	50459,91
7	10-jun-2012	6864,03	2144,55	4719,48	45740,43
8	10-jun-2013	6864,03	1943,97	4920,06	40820,37
9	10-jun-2014	6864,03	1734,87	5129,16	35691,21
10	10-jun-2015	6864,03	1516,88	5347,15	30344,06
11	10-jun-2016	6864,03	1289,62	5574,41	24769,65
12	10-jun-2017	6864,03	1052,71	5811,32	18958,33
13	10-jun-2018	6864,03	805,73	6058,30	12900,03
14	10-jun-2019	6864,03	548,25	6315,78	6584,25
15	10-jun-2020	6864,03	279,83	6584,20	0,05
Totaal		102 960,45	27 960,50	74 999,95	

De kostprijs van de lening bedraagt 27 960,50 euro aan intresten alleen. Daarbij komen nog de registratierechten die 10 % (7 500 euro) of 5 %(3 750 euro) van het geleende bedrag bedragen.

De kostprijs van de lening is dus: 35 460,50 euro in het geval van ‘groot beschrijf’ of 31 710,50 euro in het geval van ‘klein beschrijf’.

5

$$\begin{aligned} u_{12} &= \sqrt[12]{1,0375} = 1,003073 \\ A = a \times \frac{u^n - 1}{u - 1} &= 150 \times \frac{1,003073^{144} - 1}{0,003073} = 27\,117{,}96 \text{ euro} \end{aligned}$$

6

$$A = a \times \frac{u^n - 1}{u - 1} = 255 \times \frac{1,04^{20} - 1}{0,04} = 7\,593{,}41 \text{ euro}$$

7 1

$$\begin{aligned} A &= a \times \frac{u^n - 1}{u - 1} \\ a &= A \times \frac{u - 1}{u^n - 1} \\ &= 80\,000 \times \frac{0,0275}{1,0275^{10} - 1} = 7\,059{,}18 \text{ euro} \end{aligned}$$

2

$$\begin{aligned} u_{12} &= \sqrt[12]{1,0275} = 1,002263 \\ a &= 80\,000 \times \frac{0,002263}{1,002263^{120} - 1} = 580{,}99 \text{ euro} \end{aligned}$$

Dit is *minder* dan 7,059,18 euro gedeeld door 12 (588,265 euro), omdat eerste de betalingen al beginnen na een maand.

8

$$\begin{aligned} u_{12} &= \sqrt[12]{1,0435} = 1,003555 \\ L &= \frac{a \times \frac{u^n - 1}{u - 1}}{u^n} \\ &= \frac{112 \times \frac{1,003555^{180} - 1}{0,003555}}{1,003555^{180}} = 14\,872{,}09 \text{ euro} \end{aligned}$$

9

$$L = \frac{a \times \frac{u^n - 1}{u - 1}}{u^n} = \frac{1350 \times \frac{1,00275^{10} - 1}{0,00275}}{1,0275^{10}} = 11\,664{,}10 \text{ euro}$$

10

$$u_{12} = \sqrt[12]{1,0525} = 1,004273$$

1

$$\begin{aligned}
a &= L \times u^n \times \frac{u-1}{u^n-1} \\
&= 35\,000 \times 1,004273^{120} \times \frac{0,004273}{1,004273^{120}-1} = 373{,}42 \text{ euro} \\
Totaal &= 120 \times 373,42 = 44\,481,40 \\
Intresten &= 44\,481,40 - 35\,000 = 9\,810,40
\end{aligned}$$

2

$$\begin{aligned}
a &= L \times u^n \times \frac{u-1}{u^n-1} \\
&= 35\,000 \times 1,004273^{180} \times \frac{0,004273}{1,004273^{180}-1} = 279{,}11 \text{ euro} \\
Totaal &= 180 \times 279,11 = 50\,239,80 \\
Intresten &= 50\,239,80 - 35\,000 = 15\,239,80
\end{aligned}$$

3

$$\begin{aligned}
a &= L \times u^n \times \frac{u-1}{u^n-1} \\
&= 35\,000 \times 1,004273^{240} \times \frac{0,004273}{1,004273^{240}-1} = 233{,}46 \text{ euro} \\
Totaal &= 240 \times 233,46 = 56\,030,40 \\
Intresten &= 56\,030,40 - 35\,000 = 21\,030,40
\end{aligned}$$

4

$$\begin{aligned}
a &= L \times u^n \times \frac{u-1}{u^n-1} \\
&= 35\,000 \times 1,004273^{300} \times \frac{0,004273}{1,004273^{300}-1} = 207{,}22 \text{ euro} \\
Totaal &= 300 \times 207,22 = 62\,166,00 \\
Intresten &= 62\,166,00 - 35\,000 = 27\,166,00
\end{aligned}$$

11

$$\begin{aligned}
a &= L \times u^n \times \frac{u-1}{u^n-1} \\
&= 15\,000 \times 1,059^{10} \times \frac{0,059}{1,059^{10}-1} \\
&= 2\,028{,}37 \text{ euro}
\end{aligned}$$

Tabel 11 Aflossingstabel van een annuïteitenlening

Jaar	Vervaldag	Jaarlast	Intrest	Aflossing	Saldo Kapitaal
1	01-apr-2006	2028,37	885,00	1143,37	13 856,63
2	01-apr-2007	2028,37	817,54	1210,83	12 645,80
3	01-apr-2008	2028,37	746,10	1282,27	11 363,53
4	01-apr-2009	2028,37	670,45	1357,92	10 005,61
5	01-apr-2010	2028,37	590,33	1438,04	8567,57
6	01-apr-2011	2028,37	505,49	1522,88	7044,69
7	01-apr-2012	2028,37	415,64	1612,73	5431,96
8	01-apr-2013	2028,37	320,49	1707,88	3724,08
9	01-apr-2014	2028,37	219,72	1808,65	1915,43
10	01-apr-2015	2028,37	113,01	1915,36	0,07
Totaal		20 283,7	5 283,77	14 999,93	

12

$$
\begin{aligned}
u_{12} &= \sqrt[12]{1,05} = 1,004074 \\
L &= \frac{a \times \frac{u^n - 1}{u - 1}}{u^n} \\
&= \frac{400 \times \frac{1{,}004074^{180} - 1}{0{,}004074}}{1,004074^{180}} = 50\,954{,}56 \text{ euro}
\end{aligned}
$$